À rendre pour le lundi 28 septembre 2020

Déterminant de Vandermonde

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On considère n nombres complexes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{C}^\star$. On appelle *matrice de Vandermonde*[1] associée aux α_i la matrice

$$V = (\alpha_i^{j-1})_{1\leq i,j\leq n} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}).$$

(1) (a) Dans cette question, on suppose que $n = 2$. Calculer $\det V$. À quelle(s) condition(s) sur les α_i la matrice V est-elle inversible ?

(b) Même question pour $n = 3$.

On se place maintenant dans le cas général, avec $n \geq 2$ quelconque.

(2) Montrer que, si deux des α_i sont égaux, alors la matrice V n'est pas inversible.

(3) On suppose dans cette question que les nombres α_i sont deux à deux distincts.

(a) Soit $X = (x_0, \ldots, x_{n-1}) \in \operatorname{Ker} V$. On considère le polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x_k X^k$. Montrer que les nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont des racines de P.

(b) En déduire que le polynôme P est nul, puis que V est inversible.

(4) On a montré aux questions (2) et (3) l'équivalence : « V est inversible si et seulement si les nombres α_i sont deux à deux distincts. » L'objectif de cette question est de calculer le déterminant de V dans le cas général, et ainsi de retrouver cette équivalence par un autre moyen.

(a) En effectuant successivement les opérations sur les colonnes $C_n \leftarrow C_n - \alpha_1 C_{n-1}$, $C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - \alpha_1 C_{n-2}$, $\ldots$, $C_2 \leftarrow C_2 - \alpha_1 C_1$, montrer que

$$\det V = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \alpha_2 - \alpha_1 & \alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1) & \cdots & \alpha_2^{n-2}(\alpha_2 - \alpha_1) \\ 1 & \alpha_3 - \alpha_1 & \alpha_3(\alpha_3 - \alpha_1) & \cdots & \alpha_3^{n-2}(\alpha_3 - \alpha_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_n - \alpha_1 & \alpha_n(\alpha_n - \alpha_1) & \cdots & \alpha_n^{n-2}(\alpha_n - \alpha_1) \end{vmatrix}$$

(b) En déduire que

$$\det V = (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)\cdots(\alpha_n - \alpha_1) \begin{vmatrix} 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^{n-2} \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 & \cdots & \alpha_3^{n-2} \\ 1 & \alpha_4 & \alpha_4^2 & \cdots & \alpha_4^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

(c) Montrer que $\det V = \displaystyle\prod_{1\leq i<j\leq n} (\alpha_j - \alpha_i)$ et en déduire une condition nécessaire et suffisante pour que V soit inversible.

La matrice de Vandermonde et son déterminant possèdent plusieurs applications en calcul numérique. On peut notamment les retrouver dans des problèmes d'interpolation polynomiale (c'est-à-dire d'approximation d'un signal discret par un polynôme) ou dans le calcul de la transformée de Fourier discrète (qui est un des outils fondamentaux dans le domaine du traitement du signal).

---

1. d'après le mathématicien français Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796).