(1) (a) Dans ce cas, $V = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 1 & \alpha_2 \end{pmatrix}$ donc $\det V = \alpha_2 - \alpha_1$. On sait que V est inversible si et seulement si son déterminant est non nul ; autrement dit V est inversible ssi $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

(b) Si $n = 3$, alors

$$\det V = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 \\ 0 & \alpha_2 - \alpha_1 & \alpha_2^2 - \alpha_1^2 \\ 0 & \alpha_3 - \alpha_1 & \alpha_3^2 - \alpha_1^2 \end{vmatrix} = (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1) \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 \\ 0 & 1 & \alpha_2 + \alpha_1 \\ 0 & 1 & \alpha_3 + \alpha_1 \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la première colonne, on obtient :

$$\det V = (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1) \begin{vmatrix} 1 & \alpha_2 + \alpha_1 \\ 1 & \alpha_3 + \alpha_1 \end{vmatrix} = (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2).$$

On en déduit que V est inversible si et seulement si les nombres α_1, α_2 et α_3 sont deux à deux distincts.

(2) S'il existe $i \neq j$ tels que $\alpha_i = \alpha_j$, alors les lignes L_i et L_j de la matrice V sont identiques donc son déterminant est nul ; elle n'est donc pas inversible.

(3) (a) $U = (x_0, \dots, x_{n-1}) \in \operatorname{Ker} V$ donc $VU = 0$. Écrivons le système linéaire correspondant :

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} x_0 + x_1\alpha_1 + x_2\alpha_1^2 + \cdots + x_{n-1}\alpha_1^{n-1} = 0 \\ x_0 + x_1\alpha_2 + x_2\alpha_2^2 + \cdots + x_{n-1}\alpha_2^{n-1} = 0 \\ \quad \vdots \\ x_0 + x_1\alpha_n + x_2\alpha_n^2 + \cdots + x_{n-1}\alpha_n^{n-1} = 0 \end{array} \right.$$

autrement dit

$$\left\{ \begin{array}{l} P(\alpha_1) = 0 \\ P(\alpha_2) = 0 \\ \quad \vdots \\ P(\alpha_n) = 0 \end{array} \right.$$

Les nombres $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont donc des racines de P.

(b) Par hypothèse, dans cette question, les α_i sont deux à deux distincts, P admet donc au moins n racines distinctes. Par ailleurs, par définition de $P = \sum_{k=0}^{n-1} x_k X^k$, $\deg P \leq n-1$. On en déduit que le polynôme P est nécessairement nul. Ceci implique que tous ses coefficients soient nuls, donc $x_0 = \cdots = x_{n-1} = 0$, autrement dit $U = 0$.

Ceci étant vrai pour tout vecteur $U \in \operatorname{Ker} V$, on en déduit que $\operatorname{Ker} V = \{0\}$, ce qui démontre que la matrice V est inversible.

(4) (a) On commence par effectuer la première opération proposée : $C_n \leftarrow C_n - \alpha_1 C_{n-1}$. On a donc :

$$\det V = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{n-2} & 0 \\ 1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{n-2} & \alpha_2^{n-2}(\alpha_2 - \alpha_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \cdots & \alpha_n^{n-2} & \alpha_n^{n-2}(\alpha_n - \alpha_1) \end{vmatrix}$$

En réitérant le procédé sur la colonne précédente, et ainsi de suite, on voit qu'on obtient bien le déterminant demandé.

(b) Pour tout $i \in [\![2;n]\!]$, on voit que le facteur $(\alpha_i - \alpha_1)$ est commun à toute la i-ème ligne. Par linéarité du déterminant par rapport à ses lignes, on a donc

$$\det V = (\alpha_2 - \alpha_1)\cdots(\alpha_n - \alpha_1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \alpha_n & \cdots & \alpha_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

On développe alors ce déterminant par rapport à sa première ligne pour obtenir le résultat demandé.

(c) On voit que les étapes (a) et (b) permettent de se ramener au déterminant de Vandermonde de taille $n-1$ associé aux nombres $\alpha_2, \dots, \alpha_n$. Ceci nous suggère naturellement une démonstration par récurrence.

L'initialisation est triviale si $n = 1$ ($\det V = 1$), on peut aussi se référer aux questions (1)(a) et (b) pour les cas $n = 2$ et $n = 3$.

Soit maintenant $n \in \mathbf{N}$. On suppose que le déterminant d'une matrice de Vandermonde de taille n associée à des coefficients $(\alpha_i)_{1 \le i \le n}$ est $\prod_{1 \le i < h \le n} (\alpha_j - \alpha_i)$.

Considérons alors la matrice de Vandermonde V de taille $n+1$ associée aux coefficients $\alpha_1, \dots \alpha_{n+1}$. D'après les deux questions précédentes,

$$\det V = (\alpha_2 - \alpha_1)\cdots(\alpha_{n+1} - \alpha_1)\begin{vmatrix} 1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_{n+1} & \cdots & \alpha_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

Mais ce nouveau déterminant de taille n est le déterminant de la matrice de Vandermonde associé aux nombres $(\alpha_2, \dots, \alpha_{n+1})$ donc, par hypothèse de récurrence,

$$\det V = (\alpha_2 - \alpha_1)\cdots(\alpha_{n+1} - \alpha_1) \prod_{2 \le i < j \le n+1} (\alpha_j - \alpha_i) = \prod_{1 \le i < j \le n+1} (\alpha_j - \alpha_i),$$

ce qui est bien la formule recherchée et achève la récurrence.

La matrice V est inversible si et seulement si son déterminant n'est pas nul. Or celui-ci est le produit de tous les facteurs $(\alpha_j - \alpha_i)$ pour tous les couples $1 \le i < j \le n$. Le déterminant est donc non nul si et seulement si aucun de ces facteurs n'est nul, autrement dit s'il n'existe aucun couple $i < j$ tel que $\alpha_i = \alpha_j$. En d'autres termes, V est inversible si et seulement si les α_i sont deux à deux distincts.

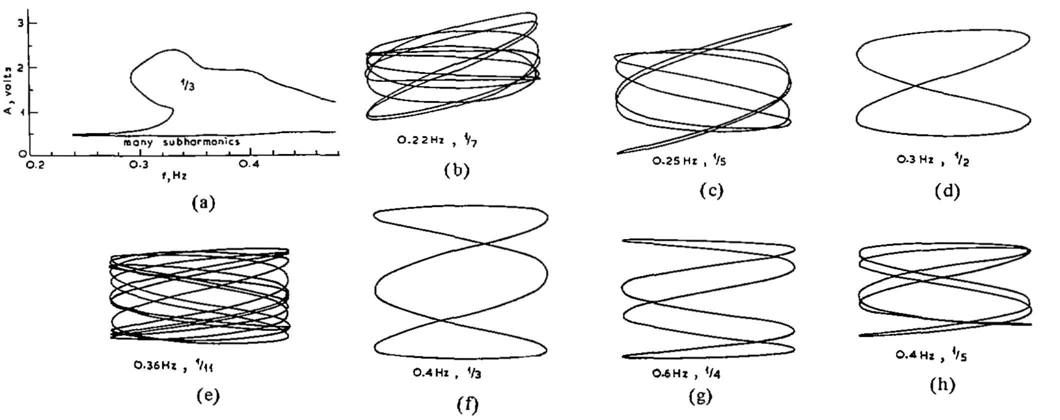

Fig. 3. Illustrations of subharmonic responses.

Source de l'illustration : I. Goknar – « Obtaining the inverse of the generalized Vandermonde matrix of the most general type », *IEEE Transactions on Automatic Control* **18** (1973), no. 5, pp. 530-532.