TSI2 **Mathématiques – Devoir en temps libre n°3** 2020-21

À rendre pour le lundi 2 novembre 2020

Exercice I. Une série à paramètres

Soient $a, b \in \mathbf{R}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose

$$u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}.$$

(1) Donner le développement limité de l'expresssion $\sqrt{1+x}$ à l'ordre 2 pour $x \to 0$.

(2) Vérifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0 si et seulement si $a+b=-1$. On pourra factoriser par $\sqrt{n}$ et effectuer un développement limité au premier ordre.

(3) Déterminer l'ensemble des valeurs $a, b \in \mathbf{R}$ telles que $\sum u_n$ soit convergente.

Exercice II. La journée d'un chat

Un mathématicien observe le comportement de son chat, qui consiste en trois activités principales : manger, dormir et faire sa toilette. Après une journée d'observation minute par minute, les constatations sont les suivantes :

— si le chat dort, il continue de dormir la minute suivante avec probabilité 0,4, va manger avec probabilité 0,4, ou va faire sa toilette avec probabilité 0,2 ;

— après avoir mangé pendant une minute, le chat peut continuer de manger pour une nouvelle minute avec probabilité 0,3, aller dormir avec probabilité 0,3 ou aller faire sa toilette avec probabilité 0,4 ;

— enfin, après une minute de toilette, le chat peut décider de continuer sa toilette avec probabilité 0,2 ; il peut aussi retourner manger avec probabilité 0,5, ou dormir avec probabilité 0,3.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit l'événement D_n (respectivement M_n, T_n) comme « le chat consacre la n-ème minute de la journée à dormir » (respectivement : à manger, à faire sa toilette). On note d_n, m_n et t_n les probabilités respectives de ces événements.

(1) Exprimer les données de l'énoncé sous la forme de probabilités conditionnelles faisant intervenir les événements D_{n+1}, T_{n+1}, M_{n+1}, D_n, M_n et T_n.

(2) En déduire, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'expression des probabilités d_{n+1}, m_{n+1} et t_{n+1} en fonction de d_n, m_n et t_n.

(3) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} d_n \\ m_n \\ t_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$. Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

(4) Montrer que A est diagonalisable et la diagonaliser.

(5) Déterminer la « matrice limite » de A^n lorsque n tend vers $+\infty$.

(6) Le mathématicien s'absente pour la journée. En rentrant chez lui le soir, quelle est la probabilité pour qu'il retrouve son chat en train de manger ? de dormir ? de faire sa toilette ? Ces probabilités dépendent-elles de l'activité à laquelle le chat était occupé lorsque le mathématicien est parti de chez lui le matin ?

⋆ ⋆
⋆