Exercice I. Une série à paramètres

(1) On sait que, pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$, lorsque x tend vers 0, on a le développement limité $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)$. En particulier, pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on obtient $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$.

(2) Pour n tendant vers $+\infty$,

$$u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2} = \sqrt{n}\left(1 + a\sqrt{1+\tfrac{1}{n}} + b\sqrt{1+\tfrac{2}{n}}\right),$$

et $\frac{1}{n}$ et $\frac{2}{n}$ tendent vers 0 donc on peut appliquer la formule de la question précédente à $x = \frac{1}{n}$ et $x = \frac{2}{n}$ respectivement, en se restreignant à l'ordre 1 pour l'instant :

$$\sqrt{1+\tfrac{1}{n}} = 1 + \tfrac{1}{2n} + o\left(\tfrac{1}{n}\right) \quad \text{et} \sqrt{1+\tfrac{2}{n}} = 1 + \tfrac{1}{n} + o\left(\tfrac{1}{n}\right).$$

Ainsi

$$u_n = \sqrt{n}\left(1 + a + \tfrac{a}{2n} + b + \tfrac{b}{2}\cdot\tfrac{2}{n} + o\left(\tfrac{1}{n}\right)\right) = (1+a+b)\sqrt{n} + \left(\tfrac{a}{2}+b\right)\tfrac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Si $1+a+b \neq 0$, alors $u_n \sim (1+a+b)\sqrt{n}$ et tend donc vers $\pm\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Au contraire, si $1+a+b=0$, alors $u_n = \left(\frac{a}{2}+b\right)\frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(3) D'après la question précédente, il est nécessaire pour que $\sum u_n$ soit convergente d'avoir $1+a+b=0$ (sinon, la série est grossièrement divergente). On suppose donc dans toute la suite que cette condition est vérifiée.

Si $\frac{a}{2}+b \neq 0$, alors d'après la question précédente, on a l'équivalent $u_n \sim \left(\frac{a}{2}+b\right)\frac{1}{\sqrt{n}}$, mais $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente (série de Riemann d'exposant $\alpha = \frac{1}{2} < 1$) donc $\sum u_n$ est divergente d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs.

Il est donc nécessaire d'avoir $\frac{a}{2}+b=0$ pour que la série converge. Est-ce suffisant ? Le développement limité au premier ordre ne nous permet pas de conclure dans ce cas. En effet, il s'écrit alors $u_n = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, mais comme $\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente, le théorème de comparaison des séries à termes positifs ne s'applique pas. On pousse donc le développement limité jusqu'au second ordre, en utilisant la formule de la question (1) :

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n}\left(1 + a + \tfrac{a}{2n} - \tfrac{a}{8n^2} + b + \tfrac{b}{n} - \tfrac{b}{8}\cdot\tfrac{4}{n^2} + o\left(\tfrac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= (1+a+b)\sqrt{n} + \left(\tfrac{a}{2}+b\right)\tfrac{1}{\sqrt{n}} - \left(\tfrac{a}{8}+\tfrac{b}{2}\right)\tfrac{1}{n\sqrt{n}} + o\left(\tfrac{1}{n\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

Dans le cas où $1+a+b=0$ et $\frac{a}{2}+b=0$, on a donc $u_n = -\left(\frac{a}{8}+\frac{b}{2}\right)\frac{1}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$. Plus précisément,

$$\begin{cases} 1+a+b=0 \\ \frac{a}{2}+b=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1-2b+b=0 \\ a=-2b \end{cases} \iff \begin{cases} b=1 \\ a=-2 \end{cases}$$

donc $u_n = -\frac{1}{4n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \sim -\frac{1}{4n\sqrt{n}}$. On sait que $\sum\frac{1}{n\sqrt{n}}$ est convergente (série de Riemann d'exposant $\alpha = \frac{3}{2} > 1$), donc d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n$ est convergente.

Au final, on a donc la condition nécessaire et suffisante :

$$\sum u_n \text{ convergente} \iff \begin{cases} 1+a+b=0 \\ \frac{a}{2}+b=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \end{cases}$$

Exercice II. La journée d'un chat

(1) Pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}_{D_n}(D_{n+1}) = 0{,}4; \quad \mathbf{P}_{D_n}(M_{n+1}) = 0{,}4; \quad \mathbf{P}_{D_n}(T_{n+1}) = 0{,}2; \\ &\mathbf{P}_{M_n}(D_{n+1}) = 0{,}3; \quad \mathbf{P}_{M_n}(M_{n+1}) = 0{,}3; \quad \mathbf{P}_{M_n}(T_{n+1}) = 0{,}4; \\ &\mathbf{P}_{T_n}(D_{n+1}) = 0{,}3; \quad \mathbf{P}_{T_n}(M_{n+1}) = 0{,}5; \quad \mathbf{P}_{T_n}(T_{n+1}) = 0{,}2. \end{aligned}$$

(2) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, le système (D_n, M_n, T_n) est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, on a donc

$$\begin{aligned} d_{n+1} = \mathbf{P}(D_{n+1}) &= \mathbf{P}_{D_n}(D_{n+1})\mathbf{P}(D_n) + \mathbf{P}_{M_n}(D_{n+1})\mathbf{P}(M_n) + \mathbf{P}_{T_n}(D_{n+1})\mathbf{P}(T_n) \\ &= 0{,}4d_n + 0{,}3m_n + 0{,}3t_n. \end{aligned}$$

De même,

$$m_{n+1} = 0{,}4d_n + 0{,}3m_n + 0{,}5t_n \quad \text{et} \quad t_{n+1} = 0{,}2d_n + 0{,}4m_n + 0{,}2t_n.$$

(3) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a donc $X_{n+1} = AX_n$, où

$$A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

(4) On peut évidemment s'en sortir en calculant le polynôme caractéristique de A, mais on peut se faciliter les calculs en s'intéressant plutôt aux valeurs propres de la matrice $B = 10A$. En effet, si $\lambda \in \mathbf{R}$ est une valeur propre de B, alors il existe $X \in \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ tel que $BX = \lambda X$, mais alors $AX = \frac{1}{10}BX = \frac{\lambda}{10}X$. Autrement dit, une fois les valeurs propres de B trouvées, on obtient les valeurs propres de A en les divisant par 10 ; et les vecteurs propres de B sont les mêmes que les vecteurs propres de A.

Calculons donc le polynôme caractéristique de B. Pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$,

$$\begin{aligned} \chi_B(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -3 & -3 \\ -4 & \lambda - 3 & -5 \\ -2 & -4 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-4)(\lambda-3)(\lambda-2) + (-4)(-4)(-3) + (-2)(-3)(-5) \\ &\quad - (\lambda-4)(-4)(-5) - (\lambda-3)(-2)(-3) - (\lambda-2)(-4)(-3) \\ &= \lambda^3 - 9\lambda^2 - 12\lambda + 20. \end{aligned}$$

On remarque que $\lambda = 1$ est solution, on factorise donc par $\lambda - 1$, et on factorise le trinôme du second degré par la méthode de son choix :

$$\chi_B(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 8\lambda - 20) = (\lambda-1)(\lambda-10)(\lambda+2)$$

On en déduit que B admet trois valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable. Restent à déterminer les sous-espaces propres correspondants.

— $\boxed{\lambda = 1}$ Soit $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned} BX = X &\iff \begin{cases} 4x + 3y + 3z = x \\ 4x + 3y + 5z = y \\ 2x + 4y + 2z = z \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 4x + 2y + 5z = 0 \\ 2x + 4y + z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} z = -x - y \\ -x - 3y = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 2y \\ x = -3y \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi $E_1 = \operatorname{Vect}\left(\left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)\right)$.

— $\boxed{\lambda = -2}$ Soit $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{R}^3$. Alors

$$BX = -2X \iff \left\{\begin{array}{l} 4x+3y+3z = -2x \\ 4x+3y+5z = -2y \\ 2x+4y+2z = -2z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 2x+y+z = 0 \\ 4x+5y+5z = 0 \\ x+2y+2z = 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} -3y-3z = 0 \\ -3y-3z = 0 \\ x = -2y-2z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} y = -z \\ x = 0 \end{array}\right.$$

Ainsi, $E_{-2} = \mathrm{Vect}\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\right)$.

— $\boxed{\lambda = 10}$ Soit $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{R}^3$. Alors

$$BX = 10X \iff \left\{\begin{array}{l} 4x+3y+3z = 10x \\ 4x+3y+5z = 10y \\ 2x+4y+2z = 10z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} -2x+y+z = 0 \\ 4x-7y+5z = 0 \\ 2x+4y-8z = 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} 2x = y+z \\ -5y+7z = 0 \\ 5y-7z = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = \frac{6}{5}z \\ y = \frac{7}{5}z \end{array}\right.$$

Ainsi, $E_{10} = \mathrm{Vect}\left(\left(\begin{smallmatrix} 6 \\ 7 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)\right)$.

On peut ainsi diagonaliser B en écrivant $B = PDP^{-1}$, où

$$P = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Autrement dit, $A = PD'P^{-1}$, où $D' = \frac{1}{10}D$.

(5) On va utiliser la diagonalisation de D pour en déduire ses puissances : $A = PD'P^{-1}$, donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $A^n = P(D')^nP^{-1}$.

Calculons P^{-1} :

$$(P \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2+3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-2L_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 27 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -9 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3+L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 27 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow 1/3\, L_2 \\ L_3 \leftarrow 1/18\, L_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{18} & \frac{1}{18} & \frac{1}{18} \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2-9L_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{18} & \frac{1}{18} & \frac{1}{18} \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1-L_2-7L_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{18} & \frac{1}{18} & \frac{1}{18} \end{array}\right) \quad \text{donc} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{18} & \frac{1}{18} \end{pmatrix}$$

Puisqu'on ne nous demande que la limite lorsque n tend vers l'infini et pas le calcul exact pour tout n, on peut ruser un peu et ne pas faire le calcul complet (pénible !) du produit $P(D')^nP^{-1}$: en effet, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$(D')^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{10^n} & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{-2}{10}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc

$$A^n = P(D')^n P^{-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{18} & \frac{1}{18} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{18} & \frac{1}{18} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{7}{18} & \frac{7}{18} & \frac{7}{18} \\ \frac{5}{18} & \frac{5}{18} & \frac{5}{18} \end{pmatrix}$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, la matrice A^n converge donc vers $A^\star = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{7}{18} & \frac{7}{18} & \frac{7}{18} \\ \frac{5}{18} & \frac{5}{18} & \frac{5}{18} \end{pmatrix}$.

(6) Il s'agit de calculer le vecteur X_n pour une « grande » valeur de n (correspondant au nombre de minutes écoulées entre le début et la fin de la journée). En pratique, on va donc simplement calculer la limite pour n tendant vers $+\infty$ du vecteur X_n. Comme, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a la relation de récurrence $X_{n+1} = AX_n$, on en déduit que $X_n = A^n X_0$, donc que la limite pour n tendant vers $+\infty$ de X_n est donnée par $A^\star X_0$.

On fait le calcul :

$$A^\star X_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{7}{18} & \frac{7}{18} & \frac{7}{18} \\ \frac{5}{18} & \frac{5}{18} & \frac{5}{18} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0 \\ m_0 \\ t_0 \end{pmatrix} = (d_0 + m_0 + t_0) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{7}{18} \\ \frac{5}{18} \end{pmatrix}$$

Les trois états pouvant être occupés par le chat à l'instant initial forment un système complet d'événements, on a donc $d_0 + m_0 + t_0 = 1$. On en déduit que, pour n tendant vers $+\infty$, d_n tend vers $\frac{1}{3} \simeq 0{,}33$, m_n vers $\frac{7}{18} \simeq 0{,}39$ et t_n vers $\frac{5}{18} \simeq 0{,}28$, et ce indépendamment des valeurs individuelles de d_0, m_0 et t_0.

En d'autres termes, peu importe l'activité du chat au moment où le mathématicien quitte son domicile. À son retour, il a environ 33% de chances de trouver son chat endormi, 39% de le voir en train de manger et 28% de l'observer en pleine toilette.

NB : celles et ceux qui partagent leur vie avec un chat réel savent que cet exercice n'est que pure fiction ; dans la réalité, la probabilité de retrouver le chat endormi est évidemment de 1.