(1) Par définition de X et Y, on va toujours avoir $X < Y$, cela suggère que le coefficient de corrélation entre X et Y est strictement positif (si X est « grande », alors Y aussi est « grande ») et que X et Y ne sont pas indépendantes.

(2) (a) Par définition de X et Y, elles sont à valeurs entières et vérifient $1 \leq X < Y \leq 6$. Ainsi $X(\Omega) = [\![1;5]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![2;6]\!]$.

Dans toute la suite, pour tout $k \in \mathbf{N}$, on note respectivement C_k et D_k les événements « tirer une pièce conforme (resp. défectueuse) au k-ème tirage »

L'événement $(X = 1)$ correspond au fait de tirer une pièce défectueuse dès le premier tirage : la probabilité est donc $\mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(D_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

L'événement $(X = 2)$ correspond au fait de tirer une pièce défectueuse, *pour la première fois*, au deuxième tirage. Autrement dit, c'est l'événement $C_1 \cap D_2$. On a $\mathbf{P}(C_1) = \frac{4}{6}$ et la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_{C_1}(D_2) = \frac{2}{5}$, donc

$$\mathbf{P}(X = 2) = \mathbf{P}(C_1 \cap D_2) = \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15}.$$

De même pour les valeurs suivantes de X : on a $(X = k) = C_1 \cap \cdots \cap C_{k-1} \cap D_k$, donc, d'après la formule des probabilités composées,

$$\mathbf{P}(X = 3) = \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{5}$$
$$\mathbf{P}(X = 4) = \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{15}$$
$$\mathbf{P}(X = 5) = \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{1}{15}$$

On remarque que, pour tout $k \in [\![1;5]\!]$, $\mathbf{P}(X = k) = \frac{6-k}{15}$.

On étudie maintenant la loi de Y. L'événement $(Y = 2)$ signifie qu'on tire une pièce défectueuse *pour la deuxième fois* au deuxième tirage. Autrement dit, $(Y = 2) = D_1 \cap D_2$. On a $\mathbf{P}(D_1) = \mathbf{P}(X = 1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et $\mathbf{P}_{D_1}(D_2) = \frac{1}{5}$, donc $\mathbf{P}(Y = 2) = \frac{1}{15}$.

Pour l'événément $(Y = 3)$, deux combinaisons sont possibles, suivant que la première pièce défectueuse a été tirée au premier ou au deuxième tirage. On a donc $(Y = 3) = (D_1 \cap C_2 \cap D_3) \cup (C_1 \cap D_2 \cap D_3)$, la réunion étant disjointe car les deux suites de tirages sont incompatibles. Ainsi, $\mathbf{P}(Y = 3) = \mathbf{P}(D_1 \cap C_2 \cap D_3) + \mathbf{P}(C_1 \cap D_2 \cap D_3)$ et, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbf{P}(Y = 3) = \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = 2 \times \frac{4 \times 2 \times 1}{6 \times 5 \times 4} = \frac{2}{15}.$$

De même pour les valeurs suivantes de Y. Chacun des événements $(Y = k)$ peut être obtenue par $k-1$ suites (mutuellement incompatibles) de tirages possibles, le rang de tirage de la première pièce défectueuse pouvant être $2, 3, \ldots, k-1$. On constate par le calcul que, à k fixé, chacune des suites de tirages est équiprobable, on obtient donc :

$$\mathbf{P}(Y = 4) = 3 \times \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{6 \times 5 \times 4 \times 3} = \frac{1}{5}$$
$$\mathbf{P}(Y = 5) = 4 \times \frac{4 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2} = \frac{4}{15}$$
$$\mathbf{P}(Y = 6) = 5 \times \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{1}{3}$$

On remarque que, pour tout $k \in [\![2;6]\!]$, $\mathbf{P}(Y = k) = \frac{k-1}{15}$.

(b) Il s'agit de calculer $\mathbf{P}(X = i, Y = j)$ pour tous $(i, j) \in [\![1;5]\!] \times [\![2;6]\!]$.

Commençons par remarquer que, par définition de X et Y, si $i \geq j$, alors $\mathbf{P}(X = i, Y = j) = 0$.

Considérons donc un couple (i, j) avec $i < j$. Comme il n'y a que deux pièces défectueuses, tous les tirages sauf le i-ème et le j-ème ont obtenu des pièces conformes. Autrement dit, on connaît exactement le résultat des 6 tirages. Les calculs effectués à la question précédente nous montrent que, dans ce cas, indépendamment des valeurs de i et j, on trouve

$$\mathbf{P}(X = i, Y = j) = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{1}{15}.$$

Le tableau de la loi conjointe est donc le suivant :

	$X=1$	$X=2$	$X=3$	$X=4$	$X=5$
$Y=2$	1/15	0	0	0	0
$Y=3$	1/15	1/15	0	0	0
$Y=4$	1/15	1/15	1/15	0	0
$Y=5$	1/15	1/15	1/15	1/15	0
$Y=6$	1/15	1/15	1/15	1/15	1/15

En guise de vérification, on peut constater que la somme de toutes les probabilités écrites dans le tableau est bien égale à 1.

(c) D'après la formule de König-Huygens, $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$. D'après les lois marginales calculées à la question (a),

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X) &= \sum_{k=1}^{5} k \cdot \mathbf{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{5} \frac{k(6-k)}{15} = \frac{6}{15}\sum_{k=1}^{5} k - \frac{1}{15}\sum_{k=1}^{5} k^2 \\ &= \frac{2}{5} \cdot \frac{5\times 6}{2} - \frac{1}{15} \cdot \frac{5 \times 6 \times 11}{6} = \frac{7}{3} \simeq 2{,}3; \\ \mathbf{E}(Y) &= \sum_{k=2}^{6} k \cdot \mathbf{P}(Y=k) = \sum_{k=2}^{6} \frac{k(k-1)}{15} = \frac{1}{15}\left(\sum_{k=2}^{6} k^2 - \sum_{k=2}^{6} k\right) \\ &= \frac{1}{15}\left(\frac{6\times 7\times 13}{6} - 1 - \frac{6\times 7}{2} + 1\right) = \frac{14}{3} \simeq 4{,}7.\end{aligned}$$

Enfin, d'après le tableau de la loi conjointe obtenue à la question précédente, on peut calculer $\mathbf{E}(XY)$ en multipliant la probabilité de chaque case par la valeur du produit XY correspondant :

$$E(XY) = \frac{1}{15} \sum_{1 \leq i < j \leq 6} i \times j = \frac{1\times 2 + 1 \times 3 + \cdots + 5 \times 6}{15} = \frac{35}{3}.$$

Au final, on a donc

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{35}{3} - \frac{7}{3} \times \frac{14}{3} = \frac{7}{9} \simeq 0{,}8.$$

Pour en déduire le coefficient de corrélation, il s'agit maintenant de calculer les écarts-types de X et Y. Encore une fois, d'après les lois calculées en (a), le théorème de transfert et la formule de König-Huygens :

$$\mathbf{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{5} k^2 \cdot \mathbf{P}(X=k) = 7;$$

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = 7 - \frac{49}{9} = \frac{14}{9} \quad \text{donc} \quad \sigma(X) = \frac{\sqrt{14}}{3} \simeq 1{,}2.$$

$$\mathbf{E}(Y^2) = \sum_{k=2}^{6} k^2 \cdot \mathbf{P}(Y=k) = \frac{70}{3} \simeq 23{,}3;$$

$$\mathbf{V}(Y) = \mathbf{E}(Y^2) - \mathbf{E}(Y)^2 = \frac{70}{3} - \frac{196}{9} = \frac{14}{9} \quad \text{donc} \quad \sigma(Y)\sigma(X) = \frac{\sqrt{14}}{3} \simeq 1{,}2.$$

On en déduit le coefficient de corrélation :

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{7\times 9}{9 \times 14} = \frac{1}{2}.$$

Les variables X et Y sont donc positivement corrélées, ce qui est conforme à l'analyse qualitative effectuée question (1).

(3) Les raisonnements de la question (2) (a) restent en partie valables. Il faut penser qu'il reste $n-2$ pièces défectueuses à tirer après les deux premières, donc $X(\Omega) = [\![1; N-n+1$ et $Y(\Omega) = [\![2; N-n+2]\!]$.

Ensuite, le raisonnement pour le calcul de la loi de X reste identique : pour tout $k \in [\![1; N-n+1]\!]$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X=k) &= \mathbf{P}(C_1 \cap \cdots \cap C_{k-1} \cap D_k) \\ &= \frac{N-n}{N} \times \frac{N-n-1}{N-1} \cdots \frac{N-n-k+2}{N-k+2} \times \frac{n}{N-k+1} \\ &= \frac{n(N-n)!(N-k)!}{N!(N-n-k+1)!}.\end{aligned}$$

De même pour le calcul de la loi de Y : pour tout $k \in [\![2; N-n+2]\!]$, l'événement $(Y=k)$ est la réunion disjointe des $k-1$ sous-événements correspondant aux différents rangs possibles pour tirer la première pièce défectueuse. Ces sous-événements sont tous équiprobables, et on a donc

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y=k) &= (k-1) \times \frac{(N-n)(N-n-1)\cdots(N-n-k+3)n(n-1)}{N(N-1)\cdots(N-k+1)} \\ &= \frac{n(n-1)(k-1)(N-n)!(N-k)!}{N!(N-n-k+2)!}.\end{aligned}$$

(4) Si $n=2$, la remarque effectuée à la question (2) (b) reste valable : la connaissance des valeurs de X et Y détermine entièrement un tirage de N pièces, puisque tous les tirages effectués à des rangs distincts de ces deux valeurs ne peuvent être que des pièces conformes. On se convainc par le calcul que chacun de ces tirages possède pour probabilité

$$\mathbf{P}(X=i, Y=j) = \frac{(N-2)! \times 2 \times 1}{N!} = \left(\binom{N}{2}\right)^{-1},$$

à condition évidemment que $i < j$, sinon cette probabilité est nulle par définition de X et Y. En guise de vérification, on constate que la somme de toutes ces probabilités est bien égale à 1, puisqu'il existe exactement $\binom{N}{2}$ tirages différents (un tirage étant uniquement déterminé par le rang d'apparition des deux pièces défectueuses).