TSI2 2020-21

Mathématiques – Devoir en temps libre n°5

À rendre pour le lundi 4 janvier 2021

(1) Soit $\theta \in \mathbf{R}$. Déterminer $\cos(2\theta)$ et $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.

(2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe un polynôme $T_n \in \mathbf{R}[X]$ tel que $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$. Déterminer T_0, T_1, T_2, T_3 et donner une relation de récurrence satisfaite par les polynômes $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Les polynômes $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont appelés *polynômes de Tchevychev de première espèce.*

Pour tous $P, Q \in \mathbf{R}[X]$, on pose

$$\varphi(P,Q) = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

(3) Montrer que l'intégrale $\varphi(P,Q)$ est convergente pour tous $P, Q \in \mathbf{R}[X]$.

(4) Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$.

(5) Montrer que la famille $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire φ (on pourra utiliser le changement de variables $u = \arccos t$).

(6) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, calculer $\|T_n\|$.

TSI2 2020-21

Mathématiques – Devoir en temps libre n°5

À rendre pour le lundi 4 janvier 2021

(1) Soit $\theta \in \mathbf{R}$. Déterminer $\cos(2\theta)$ et $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.

(2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe un polynôme $T_n \in \mathbf{R}[X]$ tel que $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$. Déterminer T_0, T_1, T_2, T_3 et donner une relation de récurrence satisfaite par les polynômes $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Les polynômes $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont appelés *polynômes de Tchevychev de première espèce.*

Pour tous $P, Q \in \mathbf{R}[X]$, on pose

$$\varphi(P,Q) = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

(3) Montrer que l'intégrale $\varphi(P,Q)$ est convergente pour tous $P, Q \in \mathbf{R}[X]$.

(4) Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$.

(5) Montrer que la famille $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire φ (on pourra utiliser le changement de variables $u = \arccos t$).

(6) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, calculer $\|T_n\|$.