(1) On a évidemment $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$, puis :

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \cos(2\theta+\theta) = \cos(2\theta)\cos\theta - \sin(2\theta)\sin\theta = (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin\theta\cos\theta\sin\theta\\ &= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta(1-\cos^2\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.\end{aligned}$$

(2) On procède par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$.

Pour $n = 0$, on a évidemment $\cos(0\theta) = 1 = T_0(\cos\theta)$ en posant $T_0 = 1$.

Pour $n = 1$, $\cos(1\theta) = \cos\theta = T_1(\cos\theta)$ en posant $T_1 = X$.

D'après la question précédente, la propriété est également vraie pour $n = 2$ et 3, avec $T_2 = 2X^2 - 1$ et $T_3 = 4X^3 - 3X$.

Pour l'hérédité, on va pouvoir utiliser la formule :

$$\cos((n+1)\theta) = \cos(n\theta+\theta) = \cos(n\theta)\cos\theta - \sin(n\theta)\sin\theta.$$

L'hypothèse de récurrence permet d'écrire $\cos(n\theta) = T_n(\cos\theta)$, mais le terme $\sin(n\theta)$ est plus coriace. Une idée est de le faire apparaître d'une deuxième façon, avec la formule :

$$\cos((n-1)\theta) = \cos(n\theta-\theta) = \cos(n\theta)\cos\theta + \sin(n\theta)\sin\theta.$$

En additionnant les deux, les sinus se simplifient et on obtient alors :

$$\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos\theta\cos(n\theta),$$

ce qui nous permet de conclure. Rédigeons cela de manière rigoureuse (il s'agit de faire une *récurrence double* en commençant à $n = 1$; cela requiert d'avoir intialisé deux fois, ce qui n'est pas un problème ici).

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On suppose qu'il existe deux poynômes T_n et T_{n-1} tels que, pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ et $T_{n-1}(\cos\theta) = \cos((n-1)\theta)$. Alors, d'après le calcul esquissé précédemment, pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, $\cos((n+1)\theta) = 2\cos(\theta)\cos(n\theta) - \cos((n-1)\theta) = 2\cos\theta T_n(\cos\theta) - T_{n-1}(\cos\theta)$. Ainsi, si on pose $T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X) \in \mathbf{R}[X]$, on vérifiera bien la propriété $T_{n+1}(\cos\theta) = \cos((n+1)\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbf{R}$.

Ainsi, par principe de récurrence (double), il existe une famille de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$, vérifiant la formule de récurrence $T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X) \in \mathbf{R}[X]$, telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

(3) Soient $P, Q \in \mathbf{R}[X]$. La fonction $t \mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1;1[$ avec impropretés en -1 et en 1.

Pour étudier l'impropreté $t = 1$, faisons le changement de variables ($\mathcal{C}^1$ et strictement croissant) $t = 1 + h$: sous réserve de convergence, on a donc

$$\int_0^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^0 \frac{P(1+h)Q(1+h)}{\sqrt{-2h-h^2}}\,\mathrm{d}h,$$

où la deuxième intégrale est impropre en $h = 0$. Mais pour $h \to 0$, $h^2 = o(h)$ donc $-2h - h^2 \sim -2h$ et $\sqrt{-2h-h^2} \sim \sqrt{-2h}$.

Pour ce qui est du numérateur, si 1 est racine de P ou de Q, alors $P(1+h)Q(1+h) = o(1)$ donc $\frac{P(1+h)Q(1+h)}{\sqrt{-2h-h^2}} = o(\frac{1}{\sqrt{-h}})$. Dans le cas contraire, $P(1+h)Q(1+h) \sim P(1)Q(1)$ donc $\frac{P(1+h)Q(1+h)}{\sqrt{-2h-h^2}} \sim \frac{P(1)Q(1)}{\sqrt{-2h}}$. Dans les deux cas, comme l'intégrale de $\frac{1}{\sqrt{-h}}$ est convergente en 0, on en déduit par théorème de comparaison que $\int_{-1}^0 \frac{P(1+h)Q(1+h)}{\sqrt{-2h-h^2}}\,\mathrm{d}h$ est convergente ; puis, par théorème de changement de variables, que $\int_0^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

On procède de même pour l'impropreté en $t = -1$, avec le changement de variables $t = -1 + h$. On en déduit ainsi que l'intégrale $\varphi(P, Q)$ est convergente.

(4) Il s'agit de vérifier que φ est une forme bilinéaire symétrique définie et positive.

- La symétrie est évidente.

- Soient $P_1, P_2, Q \in \mathbf{R}[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Alors
$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P_1 + \mu P_2, Q) &= \int_{-1}^{1} \frac{(\lambda P_1(t) + \mu P_2(t))Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \frac{\lambda P_1(t)Q(t) + \mu P_2(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda \int_{-1}^{1} \frac{P_1(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t + \mu \int_{-1}^{1} \frac{P_2(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \lambda\varphi(P_1, Q) + \mu\varphi(P_2, Q).\end{aligned}$$
La forme φ est donc linéaire à gauche. Par symétrie, elle est donc linéaire à droite, donc bilinéaire.
- Soit $P \in \mathbf{R}[X]$. Alors $\varphi(P,P) = \int_{-1}^{1} \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \geq 0$ par positivité de l'intégrale car la fonction $t \mapsto \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est positive sur $]-1;1[$ et que $-1 \leq 1$. La forme φ est donc positive.
- Enfin, soit $P \in \mathbf{R}[X]$. On suppose que $\varphi(P,P) = 0$. Les quatre propositions suivantes sont donc vraies :
  (i) $\int_{-1}^{1} \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = 0\,;$ (iii) la fonction $t \mapsto \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1;1[\,;$
  (ii) $-1 < 1\,;$ (iv) la fonction $t \mapsto \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est positive sur $]-1;1[$,

  et on peut donc en déduire que $\frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} = 0$ pour tout $t \in\,]-1;1[$. Or $\sqrt{1-t^2}$ ne s'annule pas sur $]-1;1[\,$; on en déduit donc que $P(t) = 0$ pour tout $t \in\,]-1;1[$. Le polynôme P admet donc une infinité de racines, ce qui implique que P est le polynôme nul. Ainsi, la forme φ est définie.

La forme φ définit donc un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$.

(5) Il s'agit de montrer que, si $m \neq n \in \mathbf{N}$, alors $\varphi(T_m, T_n) = 0$. Soient donc m et n deux entiers naturels distincts. Alors
$$\varphi(T_n, T_m) = \int_{-1}^{1} \frac{T_m(t)T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$$
Comme suggéré, on va effectuer le changement de variables $u = \arccos t$ (autrement dit, $t = \cos u$), ce qui est licite car la fonction arccos est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone (décroissante) sur $]-1;1[$. On peut alors écrire $\mathrm{d}u = -\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$ et on a donc :
$$\varphi(T_m, T_n) = \int_{-1}^{1} \frac{T_m(t)T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_{\pi}^{0} T_m(\cos u)T_n(\cos u)\,(-\mathrm{d}u) = \int_{0}^{\pi} T_m(\cos u)T_n(\cos u)\,\mathrm{d}u.$$
Par définition des polynômes T_n et T_m et en appliquant la formule $\cos(p)\cos(q) = \frac{1}{2}\cos(p+q) + \cos(p-q)$, on en déduit :
$$\varphi(T_m, T_n) = \int_{0}^{\pi} \cos(mu)\cos(nu)\,\mathrm{d}u = \tfrac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \cos((m+n)u)\,\mathrm{d}u + \tfrac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \cos((m-n)u)\,\mathrm{d}u.$$
Les nombres m et n étant positifs et deux à deux distincts, $m+n$ et $m-n$ sont tous les deux non nuls, et donc
$$\varphi(T_m, T_n) = \left[\frac{\sin((m+n)u)}{2(m+n)}\right]_0^{\pi} + \left[\frac{\sin((m-n)u)}{2(m-n)}\right]_0^{\pi} = 0 + 0 = 0.$$
La famille $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est donc orthogonale.

(6) Soit $n \in \mathbf{N}$. Par définition, $\|T_n\|^2 = \varphi(T_n, T_n)$. Il s'agit donc de refaire le calcul de la question précédente dans le cas où $m = n$. Tout le début du calcul reste valable, jusqu'au calcul des primitives puisqu'on y exploite l'hypothèse $m \neq n$. On peut donc écrire :
$$\|T_n\|^2 = \tfrac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \cos(2nu)\,\mathrm{d}u + \tfrac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \cos(0)\,\mathrm{d}u = \tfrac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \cos(2nu)\,\mathrm{d}u + \frac{\pi}{2}.$$
Il faut ici séparer le cas $n = 0$ pour lequel le calcul de primitive est différent : si $n = 0$, alors $\|T_n\|^2 = \pi$. En revanche, si $n \neq 0$, alors :
$$\|T_n\|^2 = \left[\frac{\sin(2nu)}{4n}\right]_0^{\pi} + \frac{\pi}{2} = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$
Ainsi, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a
$$\|T_n\| = \begin{cases} \sqrt{\pi} & \text{si } n = 0; \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} & \text{si } n \neq 0. \end{cases}$$