TSI2 **Mathématiques – Devoir en temps limité n°1** 2020-21

Samedi 5 septembre 2020 – Durée : 2h

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Questions de cours

(1) Soient $a, b \in \mathbf{R}$. Développer $\sin(a+b)$. Donner trois formules différentes pour $\cos(2a)$.

(2) Donner les développements limités de $\cos x$ et de $\ln(1+x)$ à l'ordre 4 en 0.

(3) Soient A et B deux événements de probabilité non nulle. Donner la définition de la probabilité conditionnelle de A sachant B. Citer la formule de Bayes.

(4) Soit $f\colon x \mapsto \arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$. On admet que f est définie et dérivable sur $\mathbf{R}$. Calculer sa dérivée.

(5) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{\tan x - x}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} - x\right)$.

Exercice I

On se place dans $\mathbf{R}^4$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^4$ défini par

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y+z \\ y+z+t \\ 0 \\ x+y+3z+2t \end{pmatrix}$$

(1) Déterminer l'image par f des vecteurs de la base $\mathcal{B}$.

(2) En déduire la matrice A représentant l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$.

(3) Montrer que $f(e_3)$ et $f(e_4)$ peuvent s'écrire comme combinaisons linéaires de $f(e_1)$ et $f(e_2)$.

(4) En déduire la dimension de $\operatorname{Im} f$, puis une base de $\operatorname{Im} f$.

(5) Quelle est la dimension de $\ker f$? Montrer que la famille (u, v) est une base de $\ker f$, où

$$u = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice II

On s'intéresse dans cet exercice à l'équation $(E)\colon (x-1)e^x + x = 0$.

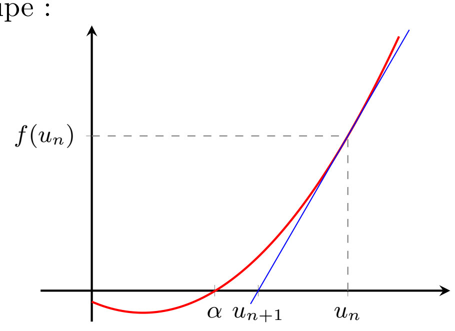
(1) Soit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = (x-1)e^x + x$. Justifier que f est dérivable et calculer sa dérivée.

(2) Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) \geq 1 - \frac{1}{e}$.

(3) Montrer que l'équation (E) possède une unique solution réelle α, et donner un encadrement de α par deux entiers consécutifs.

On cherche maintenant à calculer des valeurs approchées de α avec une précision arbitrairement grande. Pour cela, on va utiliser la méthode de Newton, dont on rappelle le principe :

On part d'un nombre u_0 pas trop éloigné de α. Puis, par récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit u_{n+1} comme étant le point d'intersection de l'axe des abscisses avec la tangente à la courbe de f passant par le point d'abscisse u_n.



(4) Soit $n \in \mathbf{N}$. Déterminer l'équation cartésienne de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse u_n. En déduire la valeur de u_{n+1} en fonction de u_n.

(5) En utilisant la méthode de Newton, donner l'expression d'une suite qui converge vers α (on ne demande pas de justifier la convergence).