Questions de cours

(1) $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$. $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$.

(2) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$.

(3) $\mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A \mid B) = \frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(B)}$.

Formule de Bayes : $\mathbf{P}_A(B) = \dfrac{\mathbf{P}_B(A)\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A)} = \dfrac{\mathbf{P}_B(A)\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}_B(A)\mathbf{P}(B) + \mathbf{P}_{\overline{B}}(A)(1-\mathbf{P}(B))}$.

(4) Pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \arcsin'\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \times \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)' \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} \times \frac{1\times\sqrt{1+x^2} - x \times \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}} \times \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{1+x^2-x^2}{1+x^2}}} \times \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} \\
&= \sqrt{1+x^2} \times \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} \\
&= \frac{1+x^2-x^2}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

(5) Pour x tendant vers 0, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ donc $\sin x - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3) \sim -\frac{x^3}{6}$. De même, $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ donc $\tan x - x = \frac{x^3}{3} + o(x^3) \sim \frac{x^3}{3}$. Au final,

$$\frac{\sin x - x}{\tan x - x} \sim \frac{-x^3/6}{x^3/3} \sim -\frac{1}{2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$$

Pour x tendant vers $+\infty$,

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+x+1} - x &= \frac{(\sqrt{x^2+x+1}-x)(\sqrt{x^2+x+1}+x)}{\sqrt{x^2+x+1}+x} \\
&= \frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} \\
&= \frac{x+1}{x\Big(\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}_{\longrightarrow 2}\Big)} \sim \frac{x}{2x} \\
&\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Exercice I

(1) On a $f(e_1) = e_1 + e_4$, $f(e_2) = -e_1 + e_2 + e_4$, $f(e_3) = e_1 + e_2 + 3e_4$ et $f(e_4) = e_2 + 2e_4$.

(2) On en déduit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(3) On remarque que $f(e_3) = 2f(e_1) + f(e_2)$ et $f(e_4) = f(e_1) + f(e_2)$.

(4) Par définition, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$. Mais d'après la question précédente, $f(e_3)$ et $f(e_4)$ peuvent s'écrire comme combinaisons linéaires de $f(e_1)$ et $f(e_2)$; on a donc $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2))$. Or la famille $(f(e_1), f(e_2))$ est libre, on en déduit que c'est une base de $\operatorname{Im} f$ qui est donc de dimension 2.

(5) D'après le théorème du rang, $\dim\ker f + \dim\operatorname{Im} f = \dim \mathbf{R}^4 = 4$. On en déduit que $\dim\ker f = 2$. On remarque que $f(u) = f(v) = 0$, donc u et v sont des vecteurs de $\ker f$. Par ailleurs, la famille (u, v) est libre. Comme elle est composée de deux vecteurs et que $\ker f$ est de dimension 2, on en déduit que (u, v) est une base de $\ker f$.

Exercice II

(1) La fonction f est une composée de fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$, elle est donc dérivable sur $\mathbf{R}$. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = e^x + (x-1)e^x + 1 = xe^x + 1$.

(2) Étudions les variations de f'. La fonction f' est dérivable sur $\mathbf{R}$ par composition et, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f''(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$, qui est positive si et seulement si $x \geq -1$. On en déduit que f' est décroissante sur $]-\infty; -1]$ et croissante sur $[-1; +\infty[$. Elle admet donc un minimum en -1.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) \geq f'(-1) = -e^{-1} + 1 = 1 - \frac{1}{e}$.

(3) La fonction f est continue sur $\mathbf{R}$. De plus, $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $\alpha \in]0; 1[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

On peut de plus remarquer que $1 - \frac{1}{e} > 0$ car $e \simeq 2{,}71 > 1$. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a donc $f'(x) > 0$. On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbf{R}$; le nombre α est donc l'unique solution de (E) sur $\mathbf{R}$.

(4) Cette tangente a pour équation $y = f'(u_n)(x - u_n) + f(u_n)$. Le nombre u_{n+1} est donné par son intersection avec l'axe des abscisses, c'est-à-dire la valeur de x pour laquelle on a $y = 0$. Ainsi, l'équation à résoudre est

$$0 = f'(u_n)(u_{n+1} - u_n) + f(u_n) \iff u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}.$$

Vu la définition de f, on a $f(u_n) = (u_n - 1)e^{u_n} + u_n$ et $f'(u_n) = u_n e^{u_n} + 1$ donc

$$u_{n+1} = u_n - \frac{(u_n - 1)e^{u_n} + u_n}{u_n e^{u_n} + 1} = \frac{(u_n^2 - u_n + 1)e^{u_n}}{u_n e^{u_n} + 1}.$$

(5) On utilise la relation de récurrence trouvée ci-dessus. Il reste à choisir une valeur de départ u_0 « proche » de α. Comme on sait que $\alpha \in]0; 1[$, on peut prendre par exemple $u_0 = 0$, $u_0 = 1$ ou $u_0 = \frac{1}{2}$. Une proposition de suite convergeant vers α est donc, par exemple :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{(u_n^2 - u_n + 1)e^{u_n}}{u_n e^{u_n} + 1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

Une telle suite approche α de manière très efficace : u_5 possède déjà 10 décimales correctes !