Samedi 19 septembre 2020 – Durée : 4h

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice I. Intégration

(1) Calculer les intégrales $A = \displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} t\sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ et $B = \displaystyle\int_1^e t^4 \ln t\,\mathrm{d}t$.

(2) Déterminer une primitive sur $]-1;1[$ de la fonction $f\colon x \mapsto \frac{1}{(1-x)(1+x)^2}$. On pourra trouver trois réels a, b, c tels que, pour tout $x \in\ ]-1;1[$, $f(x) = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{(1+x)^2}$.

(3) Calculer $C = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1+\sin t}$. On pourra effectuer le changement de variables $u = \tan\frac{t}{2}$.

Exercice II. Algèbre linéaire

On considère la partie F de $\mathbf{R}^4$ définie par

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \mid x+y=0 \text{ et } x+z=0\}.$$

(1) Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.

(2) Donner une base de F. Quelle est la dimension de F ?

(3) Compléter la base trouvée en une base de $\mathbf{R}^4$.

(4) On pose

$$u_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix};\quad u_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad u_3 = \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ?

(5) On note G le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ engendré par la famille (u_1, u_2, u_3). Quelle est la dimension de G ?

(6) Donner une base de $F \cap G$.

(7) En déduire que $F + G = \mathbf{R}^4$.

(8) Peut-on écrire de façon unique tout vecteur de $\mathbf{R}^4$ comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G ?

Problème. Polynômes et nombres de Bernoulli

A. **Polynômes de Bernoulli.**

(1) Montrer soigneusement que l'application $\psi\colon P \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$ est une forme linéaire sur $\mathbf{R}[X]$.

(2) Soit $H = \left\{P \in \mathbf{R}[X] \,\middle|\, \displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\}$. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$.

(3) Montrer que $\mathbf{R}[X] = H \oplus \mathbf{R}_0[X]$. On pourra utiliser le fait que, pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$,

$$P = \left(P - \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t\right) + \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour tout $P \in H$, on pose $D(P) = P'$. Ceci définit une application linéaire $D \in \mathcal{L}(H, \mathbf{R}[X])$.

(4) Montrer que D est surjective.

(5) Montrer que D est un isomorphisme.

On note $\varphi = D^{-1}$ l'isomorphisme réciproque de D. Ainsi, si $A \in \mathbf{R}[X]$, le polynôme $B = \varphi(A)$ est l'unique polynôme de H tel que $B' = A$.

(6) Soit $P \in \mathbf{R}[X]$. On note Q la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad Q(x) = \int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 (t-1)P(t)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que $Q \in H$.

(b) Vérifier que $Q = \varphi(P)$.

On s'intéresse maintenant à la suite de polynômes $(B_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $B_0 = 1$ et la relation de récurrence $B_{n+1} = \varphi(B_n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, le polynôme nB_n est appelé n-ème *polynôme de Bernoulli*.

(7) Calculer B_1 et B_2.

(8) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $B_n(0) = B_n(1)$.

Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on définit le polynôme C_n par

$$C_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$$

(9) Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, exprimer C'_{n+1} en fonction de C_n.

(10) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $C_{n+1} = \varphi(C_n)$.

(11) En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$.

(12) Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, montrer que $B_{2n+1}(0) = B_{2n+1}(1) = 0$.

B. **Formule d'Euler-Maclaurin.** Dans toute la suite, n désigne un entier naturel non nul et f une fonction de classe $\mathcal{C}^{2n}$ sur $[0;1]$. Pour tout entier $k \in [\![0;2n]\!]$, on note $f^{(k)}$ la dérivée d'ordre k de la fonction f.

Enfin, pour tout $k \in \mathbf{N}$, on note $b_k = B_k(0)$. Le nombre kb_k est appelé k-ème *nombre de Bernoulli*.

On pose

$$J_n = \int_0^1 B_{2n}(t) f^{(2n)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

(13) Si $n \geq 2$, montrer que $J_n = b_{2n}\big(f^{(2n-1)}(1) - f^{(2n-1)}(0)\big) + J_{n-1}$.

(14) Montrer que

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{f(0)+f(1)}{2} - b_2\big(f'(1) - f'(0)\big) + J_1.$$

(15) En déduire que

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{f(1)+f(0)}{2} - \sum_{k=1}^{n} b_{2k}\big(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)\big) + J_n.$$

(16) Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^{2n}$ sur un intervalle $[a;b]$ avec $a < b$. En considérant la fonction $x \mapsto g\big((1-x)a + bx\big)$ définie sur $[0;1]$, montrer la *formule d'Euler-Maclaurin* :

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{b-a}{2}(g(b) - g(a)) - \sum_{k=1}^{n} (b-a)^{2k} b_{2k}\big(g^{(2k-1)}(b) - g^{(2k-1)}(a)\big) + R_n,$$

$$\text{où} \quad R_n = \int_0^1 (b-a)^{(n+1)} B_{2n}(t) g^{(2n)}\big((1-t)a + bt\big)\,\mathrm{d}t.$$

(d'après Centrale-Supélec 2014)