TSI2 **Mathématiques – Devoir en temps limité n°3** 2020-21

Samedi 14 novembre 2020 – Durée : 4h

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice I

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)\sqrt{t}}; \qquad I_2 = \int_0^{+\infty} \sqrt{1+\tfrac{1}{t}}e^{-t}\,\mathrm{d}t; \qquad I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{e^t - 1}.$$

Exercice II

On considère un espace vectoriel E de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3)$ et un endomorphisme f de E dont la matrice dans la base $\mathcal{U}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) (a) Déterminer une base de l'image et du noyau de f.

(b) Déterminer le polynôme caractéristique de A.

(c) Déterminer les valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3 de A. On choisira $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

(d) Déterminer des vecteurs propres v_1, v_2 et v_3 de A associés respectivement aux valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3.

(e) Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de E.

(2) (a) Donner une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.

(b) Calculer l'inverse P^{-1} de P.

(3) Calculer A^2 et A^3.

(4) Montrer par récurrence qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que, pour tout entier n strictement positif, on puisse écrire

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} & a_n \\ a_{n+1} & a_{n+2} & a_{n+1} \\ a_n & a_{n+1} & a_n \end{pmatrix}.$$

Déterminer les termes a_1, a_2, a_3 ainsi qu'une relation de récurrence satisfaite par la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

(5) (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on a

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Diagonaliser B : déterminer une matrice inversible Q et une matrice diagonale Δ telles que $B = Q\Delta Q^{-1}$.

(c) Calculer l'inverse Q^{-1} de Q.

(d) Calculer B^n en fonction de n pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$.

(6) (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = B^{n-1} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}.$$

(b) Donner une expression de a_n pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$.

(d'après ATS 2016)

Problème

Dans tout le problème, on considère les suites $(H_n)_{n\geq 1}$ et $(u_n)_{n\geq 1}$ définies pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$ par

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad u_n = H_n - \ln(n).$$

Partie A.

(1) Pour tout $k \in \mathbf{N}^\star$, montrer que

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}.$$

(2) (a) Quelle est la limite de la suite $(H_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$?

(b) En utilisant le résultat de la question 1, montrer, pour tout entier $n \in \mathbf{N}^\star$, l'encadrement

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leq H_n \leq \ln(n) + 1.$$

(c) En déduire un équivalent simple de H_n quand n tend vers $+\infty$.

(3) (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ est décroissante (on pourra utiliser de nouveau l'encadrement de la question 1).

(b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ converge vers une limite finie $\gamma \in [0;1]$.

(4) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}_+^\star$. On pose, pour tout $k \in \mathbf{N}^\star$,

$$J_k = \frac{1}{2}\int_k^{k+1} \left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2 f''(t)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Établir, pour tout $k \in \mathbf{N}^\star$, l'égalité

$$J_k = \frac{f'(k+1) - f'(k)}{8} - \frac{f(k+1) + f(k)}{2} + \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$,

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{f(1) + f(n)}{2} + \frac{f'(n) - f'(1)}{8} + \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n-1} J_k.$$

(5) Dans cette question, on se place dans le cas particulier où $f(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.

(a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}^\star$, $0 \leq J_k \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{4t^3}$.

(b) En déduire que la série $\sum J_k$ est convergente.

(c) En déduire également, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, l'encadrement $0 \leq \sum_{k=n}^{+\infty} J_k \leq \dfrac{1}{8n^2}$.

(d) Montrer qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ tendant vers 0 telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$,

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \frac{\varepsilon_n}{n}.$$

Partie B.

(6) Soient $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de réels strictement positifs. On suppose que la série $\sum a_n$ est convergente, et que $a_n \sim b_n$ pour n tendant vers $+\infty$.

(a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $|a_n - b_n| \leq \varepsilon b_n$.

(b) En déduire que, pour tout $n \geq n_0$,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k \right| \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k.$$

(c) En déduire l'équivalent, pour n tendant vers $+\infty$:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k.$$

(7) Soit $\alpha > 1$.

(a) Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a :

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}.$$

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$ et pour tout $N > n$,

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^N \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}.$$

(c) En déduire l'équivalent, pour n tendant vers $+\infty$:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha - 1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

Partie C. On considère les suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ et $(y_n)_{n\geq 2}$ définies par :

$$\forall n \geq 1 \ x_n = u_n - \frac{1}{2n} \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2 \ y_n = x_n - x_{n-1}.$$

(8) (a) Quelle est la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$?

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $\gamma - x_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} y_k$.

(c) En déduire, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, l'égalité suivante :

$$\gamma - x_n = \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 2\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right).$$

(9) (a) Montrer qu'il existe une suite $(\varepsilon'_k)_{k\in\mathbf{N}^\star}$ tendant vers 0 et telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$,

$$\frac{1}{k-1} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} + \frac{\varepsilon'_k}{k^3}.$$

(b) À l'aide d'un développement limité à l'ordre 3, montrer l'équivalence, pour k tendant vers $+\infty$:

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 2\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \sim \frac{1}{3k^3}.$$

(10) En utilisant les résultats précédents, en déduire l'existence d'une suite $(\varepsilon''_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ tendant vers 0 et telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$,

$$H_n = \gamma + \ln(n) + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{\varepsilon''_n}{n^2}.$$

(d'après BCE (filière BL) 2010)

Le nombre $\gamma \simeq 0{,}577$ est appelé constante d'Euler-Mascheroni. *C'est, avec π et e, l'une des constantes les plus importantes en mathématiques, particulièrement dans le domaine de la théorie des nombres. Pourtant, à l'heure actuelle, nul n'est capable de dire si γ est un nombre rationnel (une fraction d'entiers) ou non.*

Quae ſeries, cum ſint conuergentes, ſi proxime ſummentur prodibit $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - - - \frac{1}{i} = l(i+1) + 0{,}577218$. Si ſumma dicatur s, foret, vt ſupra fecimus, $ds = \frac{di}{i+1}$, ideoque $s = l(i+1) + C$. Huius igitur quantitatis conſtantis C valorem deteximus, quippe eſt $C = 0{,}577218$.

L. Euler, *De Progressionibus harmonicis observationes* (1734)

⋆ ⋆
⋆