Exercice I

- $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)\sqrt{t}}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{(1+t)\sqrt{t}}$ est définie, continue et positive sur $]0;+\infty[$; il y a impropretés en 0 et en $+\infty$.

  Pour $t \to 0$, $1+t \sim 1$ donc $\frac{1}{(1+t)\sqrt{t}} \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$. Or $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ est convergente car $\frac{1}{2} < 1$ donc $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)\sqrt{t}}$ est convergente par théorème de comparaison.

  Pour $t \to +\infty$, $1+t \sim t$ donc $\frac{1}{(1+t)\sqrt{t}} \sim \frac{1}{t\sqrt{t}}$. Or $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t}}$ est convergente (car $\frac{3}{2} > 1$) donc $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)\sqrt{t}}$ est convergente par théorème de comparaison.

  Bilan : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)\sqrt{t}}$ est convergente.

- $I_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{1+\tfrac{1}{t}}e^{-t}\,\mathrm{d}t$. La fonction $t \mapsto \sqrt{1+\frac{1}{t}}e^{-t}$ est continue et positive sur $]0;+\infty[$; il y a impropretés en 0 et en $+\infty$.

  Pour $t \to 0$, $1+\frac{1}{t} \sim \frac{1}{t}$ et $e^{-t} \to 1$ donc $\sqrt{1+\frac{1}{t}}e^{-t} \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$. Or $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ est convergente donc $\int_0^1 \sqrt{1+\frac{1}{t}}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est convergente, par théorème de comparaison.

  Pour $t \to +\infty$, $1+\frac{1}{t} \to 1$ donc $\sqrt{1+\frac{1}{t}}e^{-t} \sim e^{-t}$. Or $\int_1^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge, donc $\int_1^{+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{t}}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

  Bilan : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{1+\tfrac{1}{t}}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

- $I_3 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{e^t-1}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{e^t-1}$ est continue et positive sur $]0;+\infty[$. Les impropretés sont en 0 et en $+\infty$.

  Pour $t \to 0$, $e^t = 1+t+o(t)$ donc $e^t-1 \sim t$. Ainsi, $\frac{1}{e^t-1} \sim \frac{1}{t}$. Or $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$ est divergente, donc $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{e^t-1}$ est divergente par théorème de comparaison.

  Pour $t \to +\infty$, on peut montrer que l'intégrale converge ($\frac{1}{e^t-1} \sim e^{-t}$) mais c'est superflu puisqu'il y a divergence en au moins une des impropretés.

  Bilan : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{e^t-1}$ est divergente.

Exercice II

(1) (a) Une famille génératrice de l'image de f est donnée par les vecteurs colonnes de A. Les colonnes C_1 et C_3 sont identiques donc il est inutile de répéter le vecteur correspondant (u_2) ; on obtient donc $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(u_2, u_1+u_2+u_3)$.

Il est manifeste que la famille $(u_2, u_1+u_2+u_3)$ est libre, il s'agit donc d'une base de $\operatorname{Im} f$.

On vient de montrer que f est de rang 2. D'après le théorème du rang, on en déduit que $\dim(\ker f) = 1$. Or, les colonnes C_1 et C_3 de A étant identiques, on en déduit que $f(u_1) = f(u_3)$, autrement dit $u_1 - u_3 \in \ker f$. La famille constituée de l'unique vecteur $u_1 - u_3$ est une famille libre (car $u_1 - u_3 \neq 0$) de $\ker f$ qui est de dimension 1 : c'est donc une base de $\ker f$.

(b) Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$,

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix}$$
$$= \lambda(\lambda^2-\lambda-1) - \lambda = \lambda(\lambda^2-\lambda-2) = \lambda(\lambda-2)(\lambda+1).$$

(c) Les valeurs propres de A sont les racines de χ_A. On en déduit que $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = 2$.

(d) Il s'agit de résoudre successivement les systèmes $AX = \lambda_i X$ pour $i \in \{1;2;3\}$.

- $\lambda_1 = -1$: Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$. Alors

$$AX = -X \iff \begin{cases} y = -x \\ x+y+z = -y \\ y = -z \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y \\ \cancel{-y = -y} \\ z = -y \end{cases}$$

  Ainsi $v_1 = u_1 - u_2 + u_3$ convient.
- $\lambda_2 = 0$: d'après la question (1)(a), $v_2 = u_1 - u_3$ convient.
- $\lambda_3 = 2$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$. Alors

$$AX = 2X \iff \begin{cases} y = 2x \\ x+y+z = 2y \\ y = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x \\ \cancel{4x = 4x} \\ z = x \end{cases}$$

  Ainsi, $v_3 = u_1 + 2u_2 + u_3$ convient.

(e) Si on note E_1, E_2 et E_3 les sous-espaces propres de f associés respectivement aux valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3, on sait que la somme $E_1+E_2+E_3$ est directe. Comme $v_1 \in E_1$, $v_2 \in E_2$ et $v_3 \in E_3$, on en déduit que la famille (v_1, v_2, v_3) est libre. C'est une famille de trois vecteurs de E qui est de dimension 3 ; il s'agit donc d'une base de E.

(2) (a) D'après la question (1)(d), on peut prendre

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) On procède par la méthode du pivot :

$$(P \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow \frac{1}{6} L_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2 - L_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}\right)$$

Ainsi, $P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(3) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(4) Vu l'expression de A, la formule est vraie pour $n = 1$ à condition que $a_1 = 0$ et $a_2 = a_3 = 1$.

Soit maintenant $n \in \mathbf{N}^\star$. On suppose qu'on peut écrire $A^n = \begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} & a_n \\ a_{n+1} & a_{n+2} & a_{n+1} \\ a_n & a_{n+1} & a_n \end{pmatrix}$.

Alors

$$A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} & a_n \\ a_{n+1} & a_{n+2} & a_{n+1} \\ a_n & a_{n+1} & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_{n+1} + 2a_n & a_{n+1} \\ a_{n+2} & a_{n+2} + 2a_{n+1} & a_{n+2} \\ a_{n+1} & a_{n+1} + 2a_n & a_{n+1} \end{pmatrix}$$

On est bien sous la forme souhaitée à condition d'avoir $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$ et $a_{n+3} = a_{n+2} + 2a_{n+1}$.

Bilan : la matrice A^n est sous la forme souhaitée pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$. La suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^\star}$ est définie par

$$\begin{cases} a_1 = 0;\ a_2 = 1;\ a_3 = 1 \\ \forall n \in \mathbf{N}^\star\ a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n \end{cases}$$

(5) (a) Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} + 2a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}.$$

(b) Recherchons les valeurs propres de B. La matrice B est de trace 1 et de déterminant -2, on en déduit que ses valeurs propres sont 2 et -1. La matrice B est de taille 2 et admet deux valeurs propres distinctes : elle est diagonalisable.

Pour tous $x, y \in \mathbf{R}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + 2y = 2x \\ x = 2y \end{cases} \iff x = 2y;$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + 2y = -x \\ x = -y \end{cases} \iff x = -y.$$

On peut donc écrire $B = Q \Delta Q^{-1}$, avec

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c) Par la méthode du pivot ou par calcul direct, on trouve $Q^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(d) Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$,

$$\begin{aligned} B^n = Q \Delta^n Q^{-1} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^{n+1} & (-1)^{n+1} \\ 2^n & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^{n+1} + (-1)^n & 2^{n+1} + 2(-1)^{n+1} \\ 2^n + (-1)^{n+1} & 2^n + 2(-1)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(6) (a) On procède par récurrence sur n : c'est tautologique pour $n = 1$.

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$, on suppose que $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = B^{n-1} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$. Alors

$$B^n \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = B \times B^{n-1} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} + 2a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}.$$

La formule souhaitée est donc vraie pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$.

(b) On utilise la formule trouvée en (5)(d) pour B^{n-1} et les valeurs de a_1 et a_2 établies à la question (4) : pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^n + (-1)^{n-1} & 2^n + 2(-1)^n \\ 2^{n-1} + (-1)^n & 2^{n-1} + 2(-1)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc, en regardant uniquement la deuxième ligne,

$$a_n = \frac{2^{n-1} + (-1)^n}{3}$$

Vérification : on retrouve bien $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ et $a_3 = 1$. On trouve également $a_4 = 3$ et $a_5 = 5$, ce qui correspond aux calculs de A^2 et A^3 effectués à la question (3).

Problème

Partie A.

(1) Soit $k \in \mathbf{N}^\star$. Pour tout $t \in [k; k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$ donc, par croissance de l'intégrale,

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{k},$$

autrement dit $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$.

(2) (a) Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. En sommant l'inégalité de droite de la question précédente pour k allant de 1 à n, on obtient une minoration de H_n par une somme télescopique :

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^n \big(\ln(k+1) - \ln(k)\big) = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1),$$

or $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc, par comparaison, $H_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(b) On reprend le raisonnement de la question précédente, mais en sommant uniquement de k à 0 jusqu'à $n-1$: on en déduit $H_{n-1} \geq \ln(n)$ (avec la convention $H_0 = 0$). En ajoutant $\frac{1}{n}$ aux deux membres, on trouve donc $H_n \geq \ln(n) + \frac{1}{n}$.

Par ailleurs, si on s'intéresse plutôt à l'inégalité de gauche de la question (1) et qu'on somme celle-ci pour k allant de 1 à $n-1$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n-1} \big(\ln(k+1) - \ln(k)\big) = \ln(n) \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = H_n - 1,$$

d'où, en ajoutant 1 aux deux membres, la majoration demandée.

(c) On divise l'encadrement de la question précédente par $\ln(n)$, qui est strictement positif dès que $n \geq 2$:

$$1 + \frac{1}{n \ln n} \leq \frac{H_n}{\ln n} \leq 1 + \frac{1}{\ln n}.$$

Les membres de gauche et de droite convergent vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$. Par théorème d'encadrement, on en déduit que $\frac{H_n}{\ln(n)}$ tend vers 1, autrement dit que $H_n \sim \ln(n)$.

(3) (a) Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$,

$$u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - H_n - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \leq 0$$

d'après le membre de gauche de l'encadrement de la question 1. On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ est décroissante.

(b) D'après la question (2)(b), pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $0 \leq \frac{1}{n} \leq H_n - \ln(n) \leq 1$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ est ainsi décroissante et minorée, elle converge donc vers un réel γ d'après le théorème de la limite monotone. Mais comme $u_n \in [0; 1]$ pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on en déduit par passage à la limite dans les inégalités que $\gamma \in [0; 1]$.

(4) (a) La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^2$, la fonction f'' est continue sur $\mathbf{R}_+^\star$. Par ailleurs, la fonction $t \mapsto t - k - \frac{1}{2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+^\star$. Par double intégration par parties, on a donc

$$\begin{aligned} J_k &= \frac{1}{2} \int_k^{k+1} \underbrace{\left(t-k-\tfrac{1}{2}\right)^2}\overbrace{f''(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\Big[(t-k-\tfrac{1}{2})^2 f'(t)\Big]_k^{k+1} - \frac{1}{2}\int_k^{k+1} 2\,\underbrace{(t-k-\tfrac{1}{2})}\overbrace{f'(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\frac{1}{4}f'(k+1) - \frac{1}{4}f'(k)}{2} - \Big[(t-k-\tfrac{1}{2})f(t)\Big]_k^{k+1} + \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{f'(k+1) - f'(k)}{8} - \frac{1}{2}f(k+1) - \frac{1}{2}f(k) + \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

ce qui est bien le résultat attendu.

(b) On somme l'égalité précédente pour k de 1 à $n-1$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} J_k = \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n-1}\big(f'(k+1) - f'(k)\big) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\big(f(k+1) + f(k)\big) + \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

La première somme est télescopique : elle vaut $f'(n) - f'(1)$.

Dans la deuxième somme, chacun des termes $f(k)$ est compté deux fois, sauf $f(1)$ et $f(n)$ qui ne sont comptés qu'une fois : la somme vaut donc $-f(1) - f(n) + 2\sum_{k=1}^{n} f(k)$.

Enfin, d'après la relation de Chasles, la dernière somme est égale à $\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

On en déduit

$$\sum_{k=1}^{n-1} J_k = \frac{f'(n) - f'(1)}{8} - \sum_{k=1}^{n} f(k) + \frac{f(1) + f(n)}{2} + \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t,$$

ce qui est bien la formule recherchée.

(5) (a) Pour tout $t > 0$, $f''(t) = \frac{2}{t^3}$. Par ailleurs, pour tout $t \in [k; k+1]$, $-\frac{1}{2} \leq t - k - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$ donc $0 \leq (t - k - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}$. Ainsi, par croissance de l'intégrale (et en multipliant par $\frac{1}{2}$),

$$0 \leq \frac{1}{2}\int_k^{k+1} \left(t - k - \tfrac{1}{2}\right)^2 f''(t) \leq \frac{1}{2}\int_k^{k+1} \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{t^3}\,\mathrm{d}t,$$

autrement dit $0 \leq J_k \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{4t^3}$.

(b) D'après le membre de gauche de la question précédente, la série $\sum J_k$ est à termes positifs. De plus, pour tout $k \in \mathbf{N}^\star$,

$$J_k \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{4t^3} = \left[-\frac{1}{8t^2}\right]_k^{k+1} = \frac{1}{8k^2} - \frac{1}{8(k+1)^2} \leq \frac{1}{8k^2}.$$

Or $\sum \frac{1}{8k^2}$ est convergente (c'est une série de Riemann d'exposant $2 > 1$), donc par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum J_k$ est convergente [1].

(c) Soient $n < N \in \mathbf{N}^\star$. En sommant l'encadrement de la question (a) pour k allant de n à $N-1$, on trouve

$$0 \leq \sum_{k=n}^{N-1} J_k \leq \int_n^N \frac{\mathrm{d}t}{4t^3} = \left[-\frac{1}{8k^2}\right]_n^N = \frac{1}{8n^2} - \frac{1}{8N^2} \leq \frac{1}{8n^2}.$$

Ceci étant vrai pour tout $N > n$, en faisant tendre N vers $+\infty$, on en déduit par passage à la limite que $0 \leq \sum_{k=n}^{+\infty} J_k \leq \frac{1}{8n^2}$.

(d) On reprend la formule de la question (4)(b), pour la fonction $f\colon t \mapsto \frac{1}{t}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} + \frac{-\frac{1}{n^2} + 1}{8} + \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} - \sum_{k=1}^{n-1} J_k,$$

1. on pouvait aussi raisonner plus rapidement à l'aide du théorème de comparaison série-intégrale

autrement dit

$$(\star) \quad H_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + \frac{1}{8} + \ln n - \sum_{k=1}^{n-1} J_k,$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n-1} J_k = \frac{5}{8} + \underbrace{\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2}}_{\longrightarrow 0} + \underbrace{\ln n - H_n}_{\longrightarrow -\gamma} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{5}{8} - \gamma,$$

autrement dit $\sum_{k=1}^{+\infty} J_k = \frac{5}{8} - \gamma$. On peut donc écrire, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} J_k = \sum_{k=1}^{+\infty} J_k - \sum_{k=n}^{+\infty} J_k = \frac{5}{8} - \gamma - \sum_{k=n}^{+\infty} J_k.$$

En injectant cette expression dans $(\star)$, on en déduit

$$H_n - \ln n - \gamma - \frac{1}{2n} = -\frac{1}{8n^2} + \sum_{k=n}^{+\infty} J_k.$$

Mais, d'après la question (5)(c),

$$-\frac{1}{8n^2} \leq -\frac{1}{8n^2} + \sum_{k=n}^{+\infty} J_k \leq -\frac{1}{8n^2} + \frac{1}{8n^2} = 0.$$

En posant $\varepsilon_n = n\sum_{k=n}^{+\infty} J_k - \frac{1}{8n}$, on peut donc écrire $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \frac{\varepsilon_n}{n}$, avec $-\frac{1}{8n} \leq \varepsilon_n \leq 0$ qui converge donc vers 0 par encadrement.

Partie B.

(6) (a) $a_n \sim b_n$ donc le quotient $\frac{a_n}{b_n}$ converge vers 1. Autrement dit, $\frac{a_n}{b_n} - 1$ tend vers 0. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $|\frac{a_n}{b_n} - 1| \leq \varepsilon$. En multipliant des deux côtés par b_n (qui est strictement positif), on obtient le résultat recherché.

(b) La série $\sum a_n$ est convergente par hypothèse. Par théorème de comparaison, la série $\sum b_n$ est également convergente. D'après la question précédente, on en déduit que la série $\sum(a_n - b_n)$ est absolument convergente ; elle est donc convergente et, d'après l'inégalité triangulaire,

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty}(a_k - b_k)\right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k - b_k|$$

En considérant uniquement les n-èmes restes, on a

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (a_k - b_k)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k - b_k|,$$

mais $n \geq n_0$ donc, pour tout $k \geq n$, $|a_k - b_k| \leq \varepsilon b_k$, d'où

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(a_k - b_k)\right| \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k.$$

On obtient l'inégalité souhaitée en séparant la première somme en deux (ce qui est licite car les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont convergentes donc leurs restes existent).

(c) On divise le résultat de la question précédente par $\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k > 0$:

$$\left|\frac{\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k}{\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k} - 1\right| \leq \varepsilon$$

Si on récapitule les résultats depuis la question (a) : on a montré que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, l'inégalité ci-dessus soit vraie. Ceci est la définition même de la convergence du quotient de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_n$ par $\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_n$ vers 1, autrement dit du fait que ces deux restes soient équivalents.

(7) (a) Soit $k \geq 2$. Pour tout $t \in [k-1;k]$, $\frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha}$ donc, par croissance de l'intégrale,

$$\frac{1}{k^\alpha} = \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}.$$

De même, pour tout $t \in [k;k+1]$, $\frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$ et on en déduit la deuxième partie de l'encadrement.

(b) Il suffit de sommer l'encadrement précédent pour tout k allant de $n+1$ à N. La relation de Chasles permet d'obtenir de chaque côté de l'encadrement une unique intégrale avec les bornes souhaitées.

(c) On calcule les intégrales de la question précédente : $-\frac{1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}}$ est une primitive de $\frac{1}{t^\alpha}$ sur $\mathbf{R}_+^\star$ donc l'encadrement se réécrit

$$\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}}\right) \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{N^{\alpha-1}}\right)$$

et, en faisant tendre N vers $+\infty$, comme $\alpha - 1 > 0$,

$$\frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

On multiplie par $(\alpha-1)n^{\alpha-1}$:

$$\underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha-1}}_{\longrightarrow 1} \leq (\alpha-1)n^{\alpha-1}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha} \leq 1$$

donc, par théorème d'encadrement, $(\alpha-1)n^{\alpha-1}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha} \longrightarrow 1$, ce qui démontre que $\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ est équivalent à $\frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

Partie C.

(8) (a) D'après la question (5)(d), on peut écrire, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $u_n = \gamma + \frac{1}{2n} + \frac{\varepsilon_n}{n}$, autrement dit $x_n = \gamma + \frac{\varepsilon_n}{n}$. La suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ convergeant vers 0, on en déduit que x_n converge vers γ.

(b) Soient $n < N \in \mathbf{N}^\star$. On calcule la somme télescopique

$$\sum_{k=n+1}^{N} y_k = \sum_{k=n+1}^{N}(x_n - x_{n-1}) = x_N - x_n.$$

Pour N tendant vers $+\infty$, le résultat converge donc (d'après la question précédente) vers $\gamma - x_n$. On en déduit que la série $\sum y_k$ est convergente et que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$,

$$\gamma - x_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} y_k.$$

(c) Pour tout $k \geq n+1$,

$$y_k = x_k - x_{k-1} = \underbrace{H_k - H_{k-1}}_{=\frac{1}{k}}\underbrace{-\ln(k) + \ln(k-1)}_{=\ln\frac{k-1}{k}} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2(k-1)}$$

$$= \frac{1}{2k} + \frac{1}{2(k-1)} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 2\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right).$$

On obtient le résultat recherché en injectant cette expression de y_k dans le résultat de la question précédente.

(9) (a) On peut calculer explicitement $\varepsilon'_n = k^3\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^3}\right)$ et montrer que le résultat tend vers 0. Alternativement, on peut effectuer un développement limité pour k tendant vers $+\infty$:

$$\frac{1}{k-1} = \frac{1}{k}\cdot\frac{1}{1-\underbrace{1/k}_{\to 0}} = \frac{1}{k}\left(1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} + o\left(\frac{1}{k^3}\right)$$

Autrement dit, il existe une suite ε'_n qui tend vers 0 telle que, pour tout $k \in \mathbf{N}^\star$,

$$\frac{1}{k-1} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} + \frac{\varepsilon'_k}{k^3}.$$

(b) Pour k tendant vers $+\infty$, $\frac{1}{k}$ tend vers 0 donc on peut écrire

$$\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) = -\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} - \frac{1}{3k^3} + o\left(\frac{1}{k^3}\right),$$

donc, en réutilisant le résultat de la question précédente,

$$\begin{aligned}\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 2\ln\left(\frac{1}{1-k}\right) &= \frac{1}{k} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} + \frac{\varepsilon'_k}{k^3} \\ &\quad - \frac{2}{k} - \frac{1}{k^2} - \frac{2}{3k^3} + o\left(\frac{1}{k^3}\right) \\ &= \frac{1}{3k^3} + \underbrace{\frac{\varepsilon'_k}{k^3}}_{=o(\frac{1}{k^3})} + o\left(\frac{1}{k^3}\right)\end{aligned}$$

Ainsi, $\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 2\ln(1 - \frac{1}{k}) \sim \frac{1}{3k^3}$.

(10) Posons, pour tout $k \geq 2$, $z_k = \frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 2\ln(1 - \frac{1}{k})$. On a montré à la question précédente que $z_k \sim \frac{1}{3k^3}$. En particulier, on a donc $z_k > 0$ à partir d'un certain rang. De plus, $\sum \frac{1}{3k^3}$ est convergente. Les hypothèses du lemme démontré dans la question (6) sont vérifiées, et on en déduit donc que, pour n tendant vers $+\infty$,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} z_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{3k^3}.$$

Par ailleurs, d'après la question (7), $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \sim \frac{1}{2n^2}$ donc, par transitivité de la relation d'équivalence, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} z_k \sim \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2n^2}$, et on peut donc écrire

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 2\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right) = \frac{1}{6n^2}. + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

D'après la question (8)(c), on peut donc écrire, pour n tendant vers $+\infty$,

$$\gamma - x_n = \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

En injectant à la définition du terme $x_n = H_n - \ln(n) - \frac{1}{2n}$, on obtient donc

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} = o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

ce qui est le résultat recherché.