TSI2 **Mathématiques – Concours blanc n°1** 2020-21

Mardi 8 décembre 2020 – Durée : 4h

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice I. Suite d'intégrales et fonction génératrice

Dans ce problème, on étudie pour tout $n \in \mathbf{N}$ l'intégrale $u_n = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n t \,\mathrm{d}t$.

Partie A. Étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

(1) Calculer u_0, u_1 et u_2.

(2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \geq 0$, puis étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

(3) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $(n+1)u_{n+1} = nu_{n-1}$.

(4) On s'intéresse à la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par $v_n = (n+1)u_{n+1}u_n$. Vérifier que cette suite est constante et donner sa valeur.

(5) En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(n+1)u_{n+1}^2 \leq 2\pi \leq (n+1)u_n^2$.

(6) Déduire de la question précédente un encadrement de u_n en fonction de n pour tout $n \geq 1$.

(7) En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2\pi}{n}}$.

Partie B. Série entière. Dans cette partie, on étudie la série entière de rayon de convergence R définie par

$$\forall\, x \in \,]-R; R[\quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$$

(8) La série $\sum u_n$ est-elle convergente ?

(9) Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.

(10) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \,]-1; 1[$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k x^k = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\cos t} - x^n \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^n t}{1 - x\cos t}\,\mathrm{d}t.$$

(11) En déduire pour tout $x \in \,]-1; 1[$ l'égalité

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^k = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\cos t}.$$

(12) Montrer que, pour tout $x \in \,]-1; 1[$,

$$S(x) = \int_{-1}^{1} \frac{2}{(1-x) + (1+x)u^2}\,\mathrm{d}u.$$

On pourra s'aider du changement de variables $u = \tan\frac{t}{2}$.

(13) En déduire l'expression de $S(x)$ pour tout $x \in \,]-1; 1[$.

(d'après CCP 2019)

Exercice II. Étude d'une courbe

On considère deux fonctions f et g de la variable réelle t définies par

$$f(t) = \frac{t^2}{1-t^2} \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{t^3}{1-t^2}.$$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct, on considère le point $M(t)$ de coordonnées $(f(t), g(t))$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe paramétrée $\left\{M(t) \mid t \in \mathbf{R} \setminus \{\pm 1\}\right\}$.

Partie A. Deux fonctions.

(1) Déterminer les ensembles de définition des fonctions f et g.

(2) Calculer $f(\sqrt{3})$ et $g(\sqrt{3})$.

(3) Justifier que f est une fonction paire et g une fonction impaire. Que peut-on en déduire pour le point $M(-t)$ par rapport au point $M(t)$?

(4) Déterminer des fonctions équivalentes aux fonctions f et g en $+\infty$. En déduire les limites de f et g en $+\infty$.

(5) Déterminer les limites de f et g en 1 à gauche, puis à droite (il y a donc quatre limites à calculer en tout).

(6) Justifier que les fonctions f et g sont dérivables sur $[0; 1[$ et sur $]1; +\infty[$, de dérivées respectives

$$f'(t) = \frac{2t}{(1-t^2)^2} \quad \text{et} \quad g'(t) = \frac{t^2(3-t^2)}{(1-t^2)^2}.$$

(7) Déduire des questions précédentes les tableaux de variations des fonctions f et g sur $[0; 1[\cup]1; +\infty[$, dans lesquels figureront les limites, ainsi que les valeurs de f et g en $\sqrt{3}$.

Partie B. Tangente à l'origine et au point $M(\sqrt{3})$.

(8) Rappeler (sans justification) le développement limité en 0 à l'ordre 1 de $u \mapsto \frac{1}{1-u}$.

(9) Déterminer les développements limités des fonctions f et g en 0 à l'ordre 3.

(10) Sans calculer les dérivées secondes f'' et g'' des fonctions f et g, montrer que $f''(0) = 2$ et $g''(0) = 0$. Le théorème utilisé sera mentionné.

(11) En déduire les coordonnées d'un vecteur tangent à la courbe $\mathcal{C}$ en l'origine du repère.

(12) Déterminer les coordonnées d'un vecteur tangent à la courbe $\mathcal{C}$ au point $M(\sqrt{3})$.

Partie C. Asymptotes. On note $\mathcal{D}$ la droite du plan d'équation $y = x - \frac{1}{2}$. Pour t appartenant à l'ensemble de définition de f, on note $N(t)$ le point de $\mathcal{D}$ d'abscisse $f(t)$.

(13) Sachant que les limites respectives de f et g en $+\infty$ sont -1 et $-\infty$, donner une interprétation graphique de la courbe $\mathcal{C}$ vis-à-vis de la droite d'équation $x = -1$ au voisinage de $t = +\infty$. Dessiner sur la copie l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ et la droite d'équation $x = -1$ au voisinage de $t = +\infty$.

(14) Déterminer l'ordonnée $y_{N(t)}$ de $N(t)$ en fonction de $f(t)$.

On se propose dans la suite de cette partie d'examiner la quantité $g(t) - y_{N(t)}$ qui représente la distance algébrique entre les points $M(t)$ et $N(t)$.

(15) Factoriser le trinôme $P(t) = -2t^2 + t + 1$.

(16) On considère sur $[0;1[\cup]1;+\infty[$ la fonction $\delta\colon t \mapsto g(t) - f(t) + \frac{1}{2}$. Montrer que, pour tout $t \in [0;1[\cup]1;+\infty[$, $\delta(t) = \dfrac{P(t)}{2(t+1)}$.

(17) Quel est le signe de $\delta(t)$ lorsque t est au voisinage de 1 ?

(18) Déterminer la limite de la quantité $g(t) - y_{N(t)}$ lorsque t tend vers 1. Dessiner sur la copie l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de $t = 1$.

Partie D. Tracé de la courbe.

(19) En tenant compte des informations issues des questions précédentes et en utilisant le document-réponse (à rendre avec la copie), tracer la courbe suivante :

$$\mathcal{C}_1 = \{M(t) \mid t \in [0;1[\cup]1;+\infty[\}.$$

On utilisera l'échelle suivante : 2 cm pour une unité sur l'axe des abscisses et 2 cm pour une unité sur l'axe des ordonnées. On considèrera par ailleurs que $\sqrt{3} \simeq 1{,}73$.

On fera apparaître :

- la droite $\mathcal{D}$;
- les vecteurs tangents à l'origine du repère et au point $M(\sqrt{3})$;
- la droite d'équation $x = -1$.

(20) En utilisant une couleur différente ou en pointillés, compléter le tracé précédent en traçant la courbe suivante :

$$\mathcal{C}_2 = \{M(t) \mid t \in]-\infty;-1[\cup]-1;0]\}.$$

(d'après CCP 2017)

Exercice III. Fonction Gamma

Pour tout x pour lequel cette intégrale converge, on note

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

(1) Montrer que $\Gamma(1)$ est convergente et déterminer sa valeur.

(2) Montrer que $\Gamma(0)$ est divergente.

(3) Soit $x > 0$. Montrer que $\Gamma(x)$ est convergente.

(4) Soit $n \in \mathbf{N}^\star$.

(a) Soit $A \in \mathbf{R}_+^\star$. Montrer que

$$\int_0^A t^n e^{-t}\, \mathrm{d}t = A^n e^{-A} + n \int_0^A t^{n-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t.$$

(b) En déduire que $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$.

(5) Déterminer, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, l'expression de $\Gamma(n)$ en fonction de n.