Exercice I. Suite d'intégrales et fonction génératrice

Partie A. Étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

(1) $u_0 = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}t = \pi;\qquad u_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t\,\mathrm{d}t = \big[\sin t\big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2\,;$

$$u_2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

(2) Soit $n \in \mathbf{N}$. Pour tout $t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, $0 \le \cos t \le 1$, donc $0 \le \cos^n t \le 1$, puis $0 \le \cos^{n+1} t \le \cos^n t$. Comme $-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2}$, on en déduit, par croissance de l'intégrale, que $0 \le u_{n+1} \le u_n$. Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbf{N}$, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante et positive.

(3) Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. La fonction $t \mapsto \cos^n t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et la fonction $t \mapsto \cos t$ continue sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, donc par intégration par parties,

$$u_{n+1} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \overbrace{\cos t}\underbrace{\cos^n t}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\big[\sin t \cos^n t\big]_{-\pi/2}^{\pi/2}}_{=0 \text{ car } n\ge 1} + n\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{\sin^2 t}_{=1-\cos^2 t}\ \cos^{n-1} t\,\mathrm{d}t = nu_{n-1} - nu_{n+1},$$

donc $(n+1)u_{n+1} = nu_{n-1}$.

(4) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_{n+1} = (n+2)u_{n+2}u_{n+1}$, mais d'après la question précédente, $(n+2)u_{n+2} = (n+1)u_n$ donc $v_{n+1} = (n+1)u_nu_{n+1} = v_n$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est donc constante, égale à $v_0 = 1u_1u_0 = 2\pi$.

(5) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n = (n+1)u_{n+1}u_n = 2\pi$. Mais, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ étant décroissante et les nombres $(n+1)$, u_n et u_{n+1} positifs, on a

$$(n+1)u_{n+1}u_{n+1} \le (n+1)u_nu_{n+1} \le (n+1)u_nu_n,$$

autrement dit $(n+1)u_{n+1}^2 \le 2\pi \le (n+1)u_n^2$.

(6) Soit $n \ge 1$. On reprend l'inégalité de droite de la question précédente : $2\pi \le (n+1)u_n^2$ donc $u_n \ge \sqrt{\frac{2\pi}{n+1}}$.

On reprend maintenant l'inégalité de gauche, mais appliquée à $n-1$ (ce qui est licite car $n-1$ est bien positif ou nul) : $nu_n^2 \le 2\pi$, donc $u_n \le \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$. On a donc

$$\sqrt{\frac{2\pi}{n+1}} \le u_n \le \sqrt{\frac{2\pi}{n}}.$$

(7) On calcule la limite du rapport $u_n\sqrt{\frac{n}{2\pi}}$. D'après l'encadrement de la question précédente, pour tout $n \ge 1$,

$$\sqrt{\frac{n}{n+1}} \le u_n\sqrt{\frac{n}{2\pi}} \le 1.$$

Le membre de gauche et le membre de droite convergent vers 1 lorsque n tend vers l'infini. Par théorème d'encadrement, on en déduit que $u_n\sqrt{\frac{n}{2\pi}}$ converge également vers 1. Autrement dit, $u_n \sim \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$.

Partie B. Série entière.

(8) D'après la question précédente, $u_n \sim \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$, or $\sum \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$ est divergente car c'est une série de Riemann d'exposant $\frac{1}{2} \le 1$. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum u_n$ diverge.

(9) Remarquons que le fait que $\sum u_n = \sum u_n 1^n$ diverge prouve que $R \leq 1$.

L'équivalent de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ obtenu à la question (7) prouve que la suite ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On peut donc appliquer le critère de d'Alembert : pour tout $x \neq 0$,

$$\left|\frac{u_{n+1}x^{n+1}}{u_n x^n}\right| = |x|\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} |x|\sqrt{\frac{2\pi\, n}{2\pi(n+1)}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |x|.$$

D'après le critère de d'Alembert, la série $\sum u_n x^n$ est grossièrement divergente si $|x| > 1$ et absolument convergente si $|x| < 1$: on en déduit que $R = 1$.

(10) Soient $n \in \mathbf{N}^\star$ et $x \in]-1;1[$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k x^k = \sum_{k=0}^{n-1} x^k \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^k t \,\mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\sum_{k=0}^{n-1} (x\cos t)^k\right) dt,$$

par linéarité de l'intégrale. On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison $x\cos t$ différente de 1 (car $|x| < 1$ et $|\cos t| \leq 1$), on a donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} (x\cos t)^k = \frac{1 - x^n \cos^n t}{1 - x\cos t},$$

donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k x^k = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 - x^n\cos^n t}{1 - x\cos t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\cos t} - x^n \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^n t}{1 - x\cos t}\,\mathrm{d}t.$$

(11) On reprend l'égalité établie à la question précédente et on fait tendre n vers l'infini. Le terme de gauche converge vers $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^k$ car $|x| < 1$ et la série entière est de rayon 1.

Pour le terme de droite, on voit que $x^n \longrightarrow 0$. Il reste à voir que la suite des intégrales $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^n t}{1 - x\cos t}\,\mathrm{d}t$ est bornée. On sait que, pour tout $t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, $|\cos^n t| \leq 1$. Par ailleurs, $|1 - x\cos t| \geq |1| - |x\cos t| \geq 1 - |x| > 0$, donc

$$\left|\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^n t}{1 - x\cos t}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left|\frac{\cos^n t}{1 - x\cos t}\right| \mathrm{d}t \leq \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1 - |x|} = \frac{\pi}{1 - |x|}.$$

On en déduit que la quantité $x^n \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^n t}{1 - x\cos t}\,\mathrm{d}t$ converge vers 0 lorsque n tend vers l'infini, ce qui établit bien la formule demandée, par unicité de la limite.

(12) D'après la question précédente, pour tout $x \in]-1;1[$,

$$S(x) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\cos t}.$$

On effectue le changement de variables $u = \tan\frac{t}{2}$ suggéré dans l'énoncé, licite car u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. On a $\mathrm{d}u = \frac{1}{2}(1+u^2)\mathrm{d}t$ donc $\mathrm{d}t = 2\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$. Par ailleurs, on sait que $\cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2}$. Enfin, $u(\pm\frac{\pi}{2}) = \tan(\pm\frac{\pi}{4}) = \pm 1$. Par théorème de changement de variables, on a donc

$$S(x) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\cos t} = \int_{-1}^{1} \frac{2\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}}{1 - x\frac{1-u^2}{1+u^2}} = \int_{-1}^{1} \frac{2\mathrm{d}u}{1 + u^2 - x(1-u^2)} = \int_{-1}^{1} \frac{2}{(1-x) + (1+x)u^2}\mathrm{d}u.$$

(13) Soit $x \in]-1;1[$. Il s'agit de calculer l'intégrale établie à la question précédente. On va utiliser un changement de variables pour se ramener à une intégrale de la forme $\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$. Pour cela, on écrit

$$S(x) = \int_{-1}^{1} \frac{2\mathrm{d}u}{(1-x) + (1+x)u^2} = \frac{2}{1-x}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{1 + \frac{1+x}{1-x}u^2} = \frac{2}{1-x}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{1 + (au)^2},$$

avec $a = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. On pose alors $t = au$ ($\mathrm{d}t = a\mathrm{d}u$) et, par changement de variables,

$$S(x) = \frac{2}{a(1-x)}\int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{2}{a(1-x)}\big[\arctan t\big]_{-a}^{a}.$$

Remarquons que, la fonction arctangente étant impaire, le crochet peut se réécrire $2\arctan(a)$. Par ailleurs, $a(1-x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}(1-x) = \sqrt{(1+x)(1-x)} = \sqrt{1-x^2}$ Au final, on obtient donc

$$S(x) = \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} \arctan \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Exercice II. Étude d'une courbe

Partie A. Deux fonctions.

(1) Les fonctions f et g sont bien définies tant que leur dénominateur ne s'annule pas, autrement dit sur $\mathbf{R} \setminus \{\pm 1\}$.

(2) $f(\sqrt{3}) = \frac{3}{1-3} = -\frac{3}{2}$ et $g(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{1-3} = -\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

(3) On remarque que les domaines de définition de f et g sont symétriques par rapport à l'origine. De plus, pour tout $t \neq \pm 1$,

$$\begin{cases} f(-t) = \frac{(-t)^2}{1-(-t)^2} = \frac{t^2}{1-t^2} = f(t) \\ g(-t) = \frac{(-t)^3}{1-(-t)^2} = \frac{-t^3}{1-t^2} = -g(t). \end{cases}$$

On en déduit que la fonction f est paire et la fonction g impaire. Le point $M(-t)$ est donc de même abscisse, mais d'ordonnée opposée, au point $M(t)$; il s'agit donc de son symétrique par rapport à l'axe (Ox).

(4) Pour t tendant vers $+\infty$, $f(t) \sim \frac{t^2}{-t^2} = -1$ et $g(t) \sim \frac{t^3}{-t^2} = -t$. On en déduit que f tend vers -1 et g vers $-\infty$

(5) Pour t tendant vers 1, le dénominateur $1-t^2$ tend vers 0^+ si $t<1$ et 0^- si $t>1$, tandis que les deux numérateurs t^2 et t^3 tendent vers 1 ; on en déduit les quatre limites :

$$\lim_{t\to 1^-} f(t) = +\infty; \quad \lim_{t\to 1^+} f(t) = -\infty; \quad \lim_{t\to 1^-} g(t) = +\infty; \quad \lim_{t\to 1^+} g(t) = -\infty.$$

(6) Par composition, les fonctions f et g sont dérivables sur $[0;1[$ et sur $]1;+\infty[$. Pour tout $t \neq 1$, on a

$$\begin{cases} f'(t) = \frac{2t(1-t^2)-t^2(-2t)}{(1-t^2)^2} = \frac{2t}{(1-t^2)^2} \\ g'(t) = \frac{3t^2(1-t^2)-t^3(-2t)}{(1-t^2)^2} = \frac{3t^2-t^4}{(1-t^2)^2} = \frac{t^2(3-t^2)}{(1-t^2)^2} \end{cases}$$

(7) Pour dresser les tableaux de variations, il s'agit d'étudier le signe des dérivées f' et g'. On voit que f' est positive sur $[0;1[\cup]1;+\infty[$ et s'annule en $t=0$; de son côté, g' est positive sur $[0;1[\cup]1;\sqrt{3}]$, puis négative sur $[\sqrt{3};+\infty[$, avec annulation en 0 et en $\sqrt{3}$. On en déduit le tableau :

t	0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(t)$	0	$+$	$\Vert$	$+$		$+$	
$g'(t)$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$ $+\infty$	$\Vert$	$-\infty$ $\nearrow$	$-3/2$	$\nearrow$ -1	
$g(t)$	0	$\nearrow$ $+\infty$	$\Vert$	$-\infty$ $\nearrow$	$-3\sqrt{3}/2$	$\searrow$ $-\infty$	

Partie B. Tangente à l'origine et au point $M(\sqrt{3})$.

(8) $\frac{1}{1-u} = 1 + u + o(u)$.

(9) Si $t \to 0$, alors $t^2 \to 0$ donc on peut écrire, d'après la formule précédente, $\frac{1}{1-t^2} = 1 + t^2 + o(t^2)$. En multipliant par les numérateurs respectifs, on obtient

$$\begin{cases} f(t) = t^2(1+t^2+o(t^2)) = t^2 + o(t^3) \\ g(t) = t^3(1+t^2+o(t^2)) = t^3 + o(t^3) \end{cases}$$

(10) D'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 (car les fonctions f et g sont de classe $\mathcal{C}^3$ au voisinage de 0, par composition) on peut écrire

$$\begin{cases} f(t) = f(0) + tf'(0) + \frac{t^2}{2}f''(0) + \frac{t^3}{6}f'''(0) + o(t^3) \\ g(t) = g(0) + tg'(0) + \frac{t^2}{2}g''(0) + \frac{t^3}{6}g'''(0) + o(t^3) \end{cases}$$

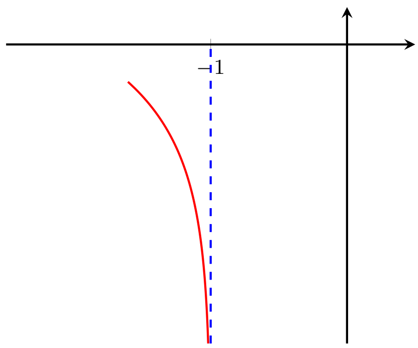
Par unicité du développement limité, on peut identifier ces formules avec celles de la question précédente. En particulier, en identifiant les termes de degré 2 : $\frac{t^2}{2}f''(0) = t^2$ donc $f''(0) = 2$ et $\frac{t^2}{2}g''(0) = 0$ donc $g''(0) = 0$.

(11) On a $M(0) = (0,0)$ donc un vecteur tangent à la courbe en l'origine du repère est donné par le premier vecteur dérivé non nul de (f,g) en $t = 0$. D'après les questions précédentes, il s'agit du vecteur dérivé d'ordre 2 et il vaut $\binom{2}{0}$. Un vecteur tangent à $\mathcal{C}$ en l'origine est donc $\binom{1}{0}$.

(12) On a $g'(\sqrt{3}) = 0$ mais $f'(\sqrt{3}) \neq 0$, donc la courbe admet en $M(\sqrt{3})$ une tangente horizontale. Un vecteur tangent est donc $\binom{1}{0}$.

Partie C. Asymptotes.

(13) On en déduit que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$ au voisinage de $t = +\infty$.



On note que $f(t) < 1$ et $g(t) \to -\infty$ donc la courbe reste à gauche de l'asymptote et se dirige vers le bas.

(14) Par définition, $N(t)$ est le point de $\mathcal{D}$ d'abscisse $f(t)$. Une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ étant $y = x - \frac{1}{2}$, on a donc $y_{N(t)} = f(t) - \frac{1}{2}$.

(15) On remarque que $t = 1$ est racine : on peut donc écrire $P(t) = -2t^2 + t + 1 = -2(t-1)(t + \frac{1}{2})$.

(16) Pour tout $t \neq 1$,

$$\delta(t) = \frac{t^3 - t^2}{1 - t^2} + \frac{1}{2} = \frac{t^2(t-1)}{(1-t)(1+t)} + \frac{1}{2} = \frac{-t^2}{1+t} + \frac{1}{2}.$$

En réduisant au même dénominateur, on obtient

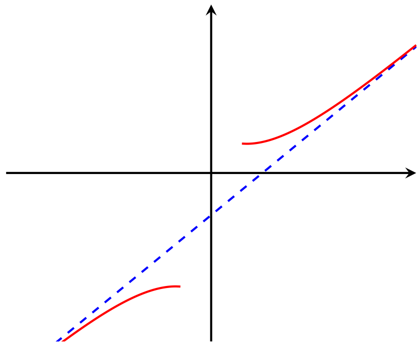
$$\delta(t) = \frac{-2t^2 + (1+t)}{2(1+t)} = \frac{P(t)}{2(1+t)}.$$

(17) Pour tout t au voisinage de 1, le dénominateur $1 + t$ est positif. Pour ce qui est du signe du numérateur $P(t)$, on utilise la factorisation de la question (14) :

t		1	
-2	$-$		$-$
$t + \frac{1}{2}$	$+$		$+$
$(t-1)$	$-$	0	$+$
$P(t)$	$+$	0	$-$

On en déduit qu'au voisinage de 1, $\delta(t)$ est positif si $t < 1$ et négatif si $t > 1$.

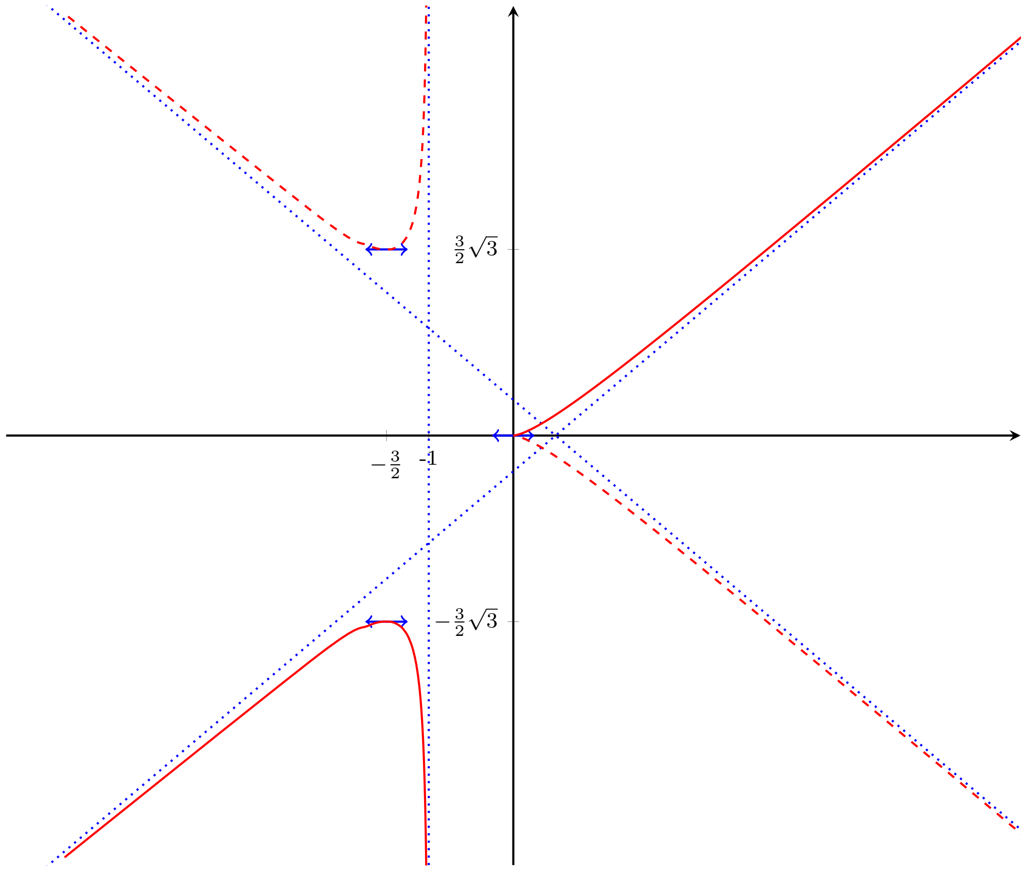
(18) D'après la question (14), $g(t) - y_{N(t)} = \delta(t) = \frac{P(t)}{2(1+t)}$. Lorsque $t \to 1$, $1 + t \to 2$ et $P(t) \to 0$ donc $\delta(t) \to 0$. On en déduit que la droite $\mathcal{D}$ est une asymptote oblique de la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de $t = 1$.



Pour $t \to 1^-$, $f(t)$ et $g(t)$ tendent vers $+\infty$ donc la courbe se dirige vers le haut à droite ; on a $\delta(t) > 0$ donc la courbe est au-dessus de son asymptote.
Pour $t \to 1^+$, $f(t)$ et $g(t)$ tendent vers $-\infty$ donc la courbe se dirige vers le bas à gauche ; on a $\delta(t) < 0$ donc la courbe est en-dessous de son asymptote.

Partie D. Tracé de la courbe.

(19) et (20)



Exercice III. Fonction Gamma

(1) $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$. La fonction $t \mapsto e^{-t}$ est continue sur $\mathbf{R}_+$, on a une impropreté en $+\infty$. Pour tout $A > 0$,

$$\int_0^A e^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-e^{-t}\right]_0^A = 1 - e^{-A} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$

donc l'intégrale $\Gamma(1)$ converge et vaut 1.

(2) $\Gamma(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$. La fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue et positive sur $\mathbf{R}_+^\star$, il y a impropretés en 0 et $+\infty$. Pour $t \to 0$, $\frac{e^{-t}}{t} \sim \frac{1}{t}$, mais on sait que $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge donc $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge par théorème de comparaison. Ainsi, $\Gamma(0)$ est une intégrale divergente.

(3) Soit $x > 0$. $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$. La fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue et positive sur $\mathbf{R}_+^\star$, il y a impropretés en 0 et en $+\infty$.

Pour $t \to 0$, $e^{-t} \to 1$ donc $t^{x-1}e^{-t}$, or $\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ est convergente car $x-1 > -1$. Par théorème de comparaison, on en déduit que $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Pour $t \to +\infty$, on peut écrire $t^{x-1}e^{-t} = \frac{t^{x+1}e^{-t}}{t^2}$, or $t^{x+1}e^{-t}$ tend vers 0 par croissance comparée, donc $t^{x-1}e^{-t} = o(\frac{1}{t^2})$. On sait que $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est convergente (car $2 > 1$), donc $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}$ est convergente par théorème de comparaison.

Ainsi, l'intégrale $\Gamma(x)$ est convergente.

(4) (a) La fonction $t \mapsto t^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et la fonction $t \mapsto e^{-t}$ continue sur $[0; A]$. Par intégration par parties,

$$\int_0^A \underbrace{t^n}\overbrace{e^{-t}}\,\mathrm{d}t = \big[-t^n e^{-t}\big]_0^A - \int_0^A nt^{n-1}\left(-e^{-t}\right)\,\mathrm{d}t = A^n e^{-A} + n\int_0^A t^{n-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t,$$

car $n > 0$ donc le facteur t^n s'annule pour $t = 0$.

(b) On fait tendre A vers $+\infty$ dans l'égalité précédente. Le membre de gauche converge vers $\Gamma(n+1)$ car l'intégrale est convergente (d'après la question (3), car $n+1 > 0$). Le terme $A^n e^{-A}$ tend vers 0 par croissance comparée, et l'intégrale de droite converge vers $\Gamma(n)$ car elle est également convergente (d'après la question (3), car $n > 0$). Ainsi, par unicité de la limite, on a $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$.

(5) Montrons par récurrence que $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$.

Pour $n = 1$, on a montré à la question (1) que $\Gamma(1) = 1 = 0!$.

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On suppose que $\Gamma(n) = (n-1)!$. Alors, d'après la question (4), $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!$.

Ainsi, par principe de récurrence, on a $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$.