Samedi 16 janvier 2021 – Durée : 4h

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice I

On considère un groupe de deux ampoules que l'on observe aux instants 0, 1, 2, 3... Ces deux ampoules sont supposées indépendantes l'une de l'autre.

À l'instant initial, on suppose que les deux ampoules sont allumées. Ces ampoules restent allumées jusqu'au moment où elles grillent. Elles peuvent donc être soit dans l'état allumé, soit dans l'état grillé. La possibilité qu'une ampoule soit éteinte n'est pas considérée ici.

À chaque instant, chaque ampoule déjà grillée reste grillée et chaque ampoule allumée a la probabilité $\frac{1}{2}$ de rester allumée et $\frac{1}{2}$ de griller.

On note, pour tout n entier naturel, X_n la variable aléatoire égale au nombre d'ampoules allumées à l'instant n. On remarquera que X_n peut prendre les valeurs 0, 1 et 2 (c'est-à-dire que $X_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$).

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on introduit le vecteur colonne $U_n \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ défini par

$$U_n = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_n = 0) \\ \mathbf{P}(X_n = 1) \\ \mathbf{P}(X_n = 2) \end{pmatrix}.$$

Mise en place du problème.

(1) Déterminer la loi de X_0 et vérifier que $\mathbf{E}(X_0) = 2$. Déterminer la variance de X_0.

(2) Justifier que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\mathbf{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}.$$

(3) Déterminer, pour tout entier naturel n et sans jusstification, les probabilités conditionnelles :

$$\mathbf{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 0); \quad \mathbf{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2); \quad \mathbf{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1); \quad \mathbf{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0);$$

$$\mathbf{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 2); \quad \mathbf{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1); \quad \mathbf{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0).$$

(4) Soit $n \geq 0$. À l'aide de la formule des probabilités totales, exprimer $\mathbf{P}(X_{n+1} = 1)$ en fonction de $\mathbf{P}(X_n = 0)$, $\mathbf{P}(X_n = 1)$ et $\mathbf{P}(X_n = 2)$.

Montrer alors que $U_{n+1} = AU_n$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$.

Espérance et variance des X_n. On se propose de déterminer l'espérance et la variance de tous les X_n sans chercher leur loi. On introduit les matrices de $\mathcal{M}_{1,3}(\mathbf{R})$ suivantes :

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(5) Calcul de l'espérance

(a) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, vérifier que $\mathbf{E}(X_n) = L_1 U_n$.

(b) Calculer $L_1 A$ et exprimer le résultat uniquement en fonction de L_1. En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{E}(X_{n+1}) = \frac{1}{2}\mathbf{E}(X_n)$.

(c) Exprimer alors $\mathbf{E}(X_n)$ en fonction de n.

(6) Calcul du moment d'ordre 2

(a) À l'aide de la formule de transfert, exprimer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{E}(X_n^2)$ en fonction de L_2 et U_n.

(b) Calculer $L_2 A$ et montrer qu'il existe deux réels α et β, que l'on déterminera, tels que $L_2 A = \alpha L_1 + \beta L_2$.

(c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{E}(X_{n+1}^2) = \frac{1}{4}\mathbf{E}(X_n^2) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

(d) On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par $u_n = \frac{1}{2^{n-1}}$. Vérifier que cette suite vérifie la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbf{N} \ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

(e) Soit $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par $v_n = \mathbf{E}(X_n^2) - u_n$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est géométrique et déterminer sa raison.

(f) En déduire, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'expression de $\mathbf{E}(X_n^2)$ en fonction de n.

(7) Déduire des deux questions précédentes l'expression, pour tout $n \in \mathbf{N}$, de $\mathbf{V}(X_n)$ en fonction de n.

(d'après CCP 2016)

Exercice II

On considère l'espace vectoriel $\mathbf{R}_1[X]$ constitué des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 1. Autrement dit, $\mathbf{R}_1[X] = \{aX + b \mid (a,b) \in \mathbf{R}^2\}$.

Pour tous $P, Q \in \mathbf{R}_1[X]$, on pose

$$\varphi(P,Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par exemple, si $P = X + 1$ et $Q = X$, alors $\varphi(P,Q) = \displaystyle\int_0^1 (t+1)t\,\mathrm{d}t$.

(1) Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}_1[X]$.

Dans la suite, pour alléger les notations, on notera désormais $\langle P, Q\rangle$ le produit scalaire de P et Q (à la place de $\varphi(P,Q)$).

On note également $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire ; autrement dit, pour tout $P \in \mathbf{R}_1[X]$, $\|P\| = \sqrt{\langle P, P\rangle}$.

(2) L'objectif des questions qui suivent est de montrer qu'il existe un unique polynôme $P_0 \in \mathbf{R}_1[X]$ tel que, pour tout $P \in \mathbf{R}_1[X]$, $\langle P, P_0 \rangle = P(0)$ (en distinguant bien P_0, qui est un polynôme, de $P(0)$, qui est la valeur de polynôme P en 0).

(a) Soit P_0 un polynôme fixé de $\mathbf{R}_1[X]$. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $\langle P, P_0 \rangle = P(0)$ pour tout $P \in \mathbf{R}_1[X]$;

(ii) $\langle 1, P_0 \rangle = 1$ et $\langle X, P_0 \rangle = 0$.

(b) On suppose désormais qu'on peut écrire $P_0(X) = a_0 X + b_0$ pour un certain couple $(a_0, b_0) \in \mathbf{R}^2$. Calculer $\langle 1, P_0 \rangle$ et $\langle X, P_0 \rangle$ en fonction de a_0 et b_0.

(c) Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $\langle P, P_0 \rangle = P(0)$ pour tout $P \in \mathbf{R}_1[X]$;

(ii′) $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}a_0 + b_0 = 1; \\ \frac{1}{3}a_0 + \frac{1}{2}b_0 = 0. \end{array} \right.$

(d) En déduire qu'il existe un unique polynôme $P_0 \in \mathbf{R}_1[X]$ tel que, pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, $\langle P, P_0 \rangle = P(0)$. Expliciter ce polynôme P_0.

On désigne par S l'ensemble des polynômes $P \in \mathbf{R}_1[X]$ tels que $\|P\| = 1$. Dans les questions qui suivent, on va déterminer, par deux méthodes différentes, la valeur maximale prise par $P(0)$ lorsque P parcourt S.

(3) On pose $P_1 = 1$.

(a) Vérifier que $\|P_1\| = 1$.

(b) À l'aide du procédé de Gram-Schmidt, déterminer un polynôme $P_2 \in \mathbf{R}[X]$ tel que (P_1, P_2) soit une base orthonormée de $\mathbf{R}_1[X]$.

(c) Montrer que les éléments de S sont exactement les polynômes de la forme $\cos(\theta)P_1 + \sin(\theta)P_2$, où θ parcourt $\mathbf{R}$.

(d) Déterminer deux réels λ et θ_0 tels que, pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, si on écrit $P = \cos(\theta)P_1 + \sin(\theta)P_2$, alors $P(0) = \lambda \cos(\theta - \theta_0)$.

(e) En déduire la valeur maximale prise par $P(0)$ lorsque P parcourt S.

(4) (a) Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz et préciser les cas où cette inégalité est une égalité.

(b) En utilisant les résultats de la question (2), montrer que, pour tout $P \in S$, $P(0) \leq \|P_0\|$.

(c) Déterminer un polynôme $P \in S$ tel que $P(0) = \|P_0\|$.

(d) Retrouver ainsi, d'une seconde manière, la valeur maximale prise par $P(0)$ lorsque P parcourt S.

(d'après CCP 2014)

Exercice III

Dans ce problème, on se propose d'étudier l'équation différentielle

$$(E) \colon x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0.$$

(1) Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière.

Série entière dont la somme est solution de (E). On suppose qu'il existe une série entière $\sum c_k x^k$, avec $c_0 = 1$, de rayon de convergence $R > 0$ et dont la fonction somme J_0 est solution de (E) sur $]-R; R[$.

(2) Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a :

$$\begin{cases} c_{2k+1} = 0 \\ c_{2k} = \frac{(-1)^k}{4^k (k!)^2} \end{cases}$$

(3) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum c_k x^k$.

(4) Soient $r > 0$ et f une autre solution de (E) sur $]0; r[$. Montrer que si la famille (J_0, f) est liée, alors f est bornée au voisinage de 0.

Inverse d'une série entière non nulle en 0. Soit $\sum \alpha_k x^k$ une série entière de rayon de convergence $R_\alpha > 0$ telle que $\alpha_0 = 1$. L'objectif de ce paragraphe est de montrer l'existence et l'unicité d'une série entière $\sum \beta_k x^k$ de rayon de convergence $R_\beta > 0$ telle que, pour tout x appartenant aux domaines de convergence des deux séries,

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k x^k \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k x^k \right) = 1.$$

(5) Montrer que si $\sum \beta_k x^k$ est solution, alors la suite $(\beta_k)_{k \in \mathbf{N}}$ vérifie :

$$(\star)\colon\ \beta_0 = 1 \quad \text{et, pour tout } n \in \mathbf{N}^\star, \quad \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k} = 0.$$

Soit $r \in]0; R_\alpha[$.

(6) Montrer qu'il existe un réel $M > 0$ tel que, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$|\alpha_k| \leq \frac{M}{r^k}.$$

(7) Montrer que $(\star)$ admet une unique solution $(\beta_k)_{k \in \mathbf{N}}$ et que, pour tout $k \in \mathbf{N}^\star$,

$$|\beta_k| \leq \frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k}.$$

On pourra raisonner par récurrence.

(8) Que peut-on dire du rayon de convergence R_β de la série entière $\sum \beta_k x^k$?

Ensemble des solutions de (E).

(9) Soient $r > 0$ et λ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0; r[$. Montrer que la fonction $y\colon x \mapsto \lambda(x) J_0(x)$ est solution de (E) sur $]0; r[$ si et seulement si la fonction $x \mapsto x J_0^2 \lambda'(x)$ est de dérivée nulle sur $]0; r[$.

(10) Montrer que J_0^2 est somme d'une série entière dont on donnera le rayon de convergence. Que vaut $J_0^2(0)$?

(11) En déduire qu'il existe une fonction η, somme d'une série entière de rayon de convergence $R_\eta > 0$, telle que la fonction $x \mapsto \eta(x) + J_0(x) \ln(x)$ soit solution de (E) sur l'intervalle $]0; R_\eta[$.

(12) En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $]0; R_\eta[$.

(d'après CCP PSI 2018)