1. Pour tout $x \in [-1;1]$, on pose $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

(1) Tracer la courbe représentative de f.

(2) Par un argument géométrique, déterminer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

(3) En déduire l'existence et la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{n^2-k^2}$.

2. À l'aide des sommes de Riemann de la fonction $f\colon x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ sur l'intervalle $[0;1]$, calculer :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+k}.$$

3. Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$x \mapsto \tan x$, sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$; $\quad x \mapsto e^x \sin x$, sur $\mathbf{R}$; $\quad x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$, sur $\mathbf{R}_+^\star$; $\quad x \mapsto \dfrac{1+x}{1+x^2}$, sur $\mathbf{R}$.

4. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\pi/3}(\tan t)^2\,\mathrm{d}t; \qquad \int_0^3 |t^2-3t+2|\,\mathrm{d}t; \qquad \int_0^1 (1+t)\sqrt{t}\,\mathrm{d}t.$$

5. Calculer les intégrales suivantes (on pourra procéder par intégration par parties) :

$$\int_1^e t^2\ln t\,\mathrm{d}t; \qquad \int_0^{\pi/4}\frac{t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t; \qquad \int_0^1 t^3 e^{t^2}\,\mathrm{d}t; \qquad \int \arctan t\,\mathrm{d}t,\ \text{sur } \mathbf{R}.$$

6. Calculer les intégrales suivantes (on pourra utiliser le changement de variables proposé entre parenthèses) :

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+e^t}\ (x=e^t); \qquad \int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+4},\ \text{sur } \mathbf{R}\ (t=2x); \qquad \int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^3 t\,\mathrm{d}t\ (x=\sin t);$$

$$\int\frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t,\ \text{sur } \mathbf{R}_+^\star\ (x=\ln t); \qquad \int\cos\sqrt{t}\,\mathrm{d}t,\ \text{sur } \mathbf{R}_+^\star\ (x=\sqrt{t})$$

7. Soit f une fonction continue sur $\mathbf{R}$. Soit $a>0$. Soit $T>0$.

(1) On suppose f paire ; montrer que $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$.

(2) On suppose f impaire ; montrer que $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

(3) On suppose f T-périodique (autrement dit, pour tout $x\in\mathbf{R}$, $f(x+T)=f(x)$). Montrer que $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$.

8. ($\star$) Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}t}{1+\cos t}; \qquad \int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}t}{\sin t+\sin 2t}; \qquad \int_1^2\frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t; \qquad \int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+4t+5},\ \text{sur } \mathbf{R}.$$