1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$,
$$\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leq \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}.$$

2. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$.

(1) Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on pose $\varphi(A,B) = \mathrm{Tr}(A^T B)$. Montrer que φ munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ d'une structure d'espace préhilbertien.

(2) Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on a
$$\mathrm{Tr}\, A \leq \sqrt{n\, \mathrm{Tr}(A^T A)}.$$
Dans quels cas a-t-on égalité ?

3. Soit E un $\mathbf{R}$-ev de dimension 2 muni d'une base (e_1, e_2). Soient $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. On considère l'application $\varphi\colon E \times E \to \mathbf{R}$ définie par
$$\varphi(x_1 e_1 + x_2 e_2, y_1 e_1 + y_2 e_2) = a x_1 y_1 + b x_1 y_2 + c x_2 y_1 + d x_2 y_2.$$
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les nombres a, b, c, d pour que φ munisse E d'une structure d'espace préhilbertien.

4. On pose, pour tous $P, Q \in \mathbf{R}[X]^2$,
$$\langle P, Q\rangle) \int_0^\pi P(t)Q(t)\sin t\,\mathrm{d}t.$$

(1) Montrer que $(\mathbf{R}[X], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace préhilbertien.

(2) Construire une base de $\mathbf{R}_2[X]$ qui soit orthonormale pour ce produit scalaire.

5. Soit E un espace préhilbertien et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

(1) Montrer que $F^\perp \cap G^\perp = (F+G)^\perp$.

(2) Montrer que $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.

(3) On suppose E de dimension finie. Montrer que $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$.

6. Soit $E = \mathcal{C}([-1;1], \mathbf{R})$, muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$. On pose :
$$F = \{f \in E \mid \forall\, x \in [0;1]\ f(x) = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{f \in E \mid \forall\, x \in [-1;0]\ f(x) = 0\}.$$

(1) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

(2) Montrer que $F^\perp = G$, que $G^\perp = F$ et que $(F^\perp)^\perp = F$.

(3) Montrer que $F + F^\perp \neq E$ et que $F^\perp + G^\perp \neq (F \cap G)^\perp$.

7. Dans l'espace $\mathbf{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique, déterminer la matrice de la projection orthogonale sur le sous-espace $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \mid x+y+z+t = x-2y+z = 0\}$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^4$.

8. Déterminer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbf{R}^2} \int_0^\pi (t\cos t - at - b)^2\,\mathrm{d}t.$