1. On effectue une suite infinie de lancers de dé. Pour tout $i \in \mathbf{N}^\star$, on note A_i l'événement « on obtient un 6 au i-ème lancer ».

(1) Définir par une phrase ne contenant aucun vocabulaire mathématique chacun des événements suivants :

$$E_1 = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i; \quad E_2 = \left(\bigcap_{i=1}^{3} \bar{A}_i\right) \cap \left(\bigcap_{i=4}^{+\infty} A_i\right); \quad E_3 = \bigcup_{i=4}^{+\infty} A_i.$$

(2) Écrire à l'aide des A_i l'événement « on obtient au moins une fois un 6 au-delà du n-ème lancer ».

(3) Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on note $C_n = \displaystyle\bigcup_{i=n+1}^{+\infty} A_i$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $C_{n+1} \subset C_n$.

Définir par une phrase ne contenant aucun vocabulaire mathématique l'événément $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n$.

(4) Décrire à l'aide des A_i les événements :
- B_n : « on n'obtient plus que des 6 à partir du n-ème lancer » ;
- B : « il existe un lancer à partir duquel on n'obtient plus que des 6 ».

2. On considère une suite de lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'avoir « pile » est $p \in]0;1[$ et la probabilité d'avoir « face » $q = 1 - p$.

(1) Pour tout $n \geq 2$, on considère l'événement A_n :« la séquence PF apparaît pour la première fois aux lancers $n - 1$ et n ». Calculer $\mathbf{P}(A_n)$.

(2) On note A l'événement « la séquence PF apparaît au moins une fois ». Calculer $\mathbf{P}(A)$. Que remarque-t-on ?

(3) On note B l'événement « la séquence PP apparaît sans avoir été précédée par une séquence PF ». Calculer $\mathbf{P}(B)$.

3. Dans une urne contenant au départ une boule verte et une boule rouge, on effectue une suite de tirages d'une boule selon la procédure suivante :
- si une boule verte est tirée, on la remet dans l'urne et on rajoute une boule rouge ;
- si une boule rouge est tirée, on arrête les tirages.

On note X le nombre de tirages effectués (convention : $X = 0$ si on ne s'arrête jamais de tirer). Pour tout $i \in \mathbf{N}^\star$, on définit les événements V_i et R_i : « la i-ème boule tirée est verte (resp. rouge) ».

(1) Pour tout $k \in \mathbf{N}^\star$, exprimer l'événement $(X = k)$ à l'aide des V_i et de R_k.

(2) Que vaut $\mathbf{P}_{V_k}(V_1 \cap \cdots \cap V_{k-1})$?

(3) Déterminer la loi de X.

(4) Calculer l'espérance de X de celle de $\frac{1}{X}$.

(5) On modifie le protocole expérimental de la façon suivante :
« si une boule verte est tirée, on la remet dans l'urne et on rajoute une boule *verte* ».
On note Y le nombre de tirages dans cette nouvelle expérience (avec la même convention). Déterminer la loi de Y. Que peut-on dire de son espérance ? Interpréter.

4. Dans une étude restée célèbre [1], le mathématicien Ladislaus Bortkiewicz a compilé les statistiques sur le nombre de décès par coup de pied de cheval dans quatorze corps d'armée prussiens entre 1875 et 1894. Les résultats sont les suivants :

Décès	0	1	2	3	4
Effectif	144	91	32	11	2

Vérifier que ces résultats sont conformes à une loi de Poisson (de quel paramètre ?).

1. L. Bortkiewicz, *Das Gesetz der kleinen Zahlen*, 1898

5. Un livre de 500 pages contient n erreur typographiques réparties au hasard. On suppose n supérieur ou égal à 100 mais inférieur au nombre de caractères pouvant tenir sur une page.

(1) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y_0 égale au nombre d'erreurs typographiques sur une page. On fera intervenir le nombre m total de caractères sur cette page. Par quelle loi peut-on l'approcher ?

Dans toute la suite, on travaillera à partir de la loi approchée.

(2) On effectue des relectures successives du livre avant de le publier. À chaque lecture, une erreur qui n'a pas encore été corrigée est repérée (et donc corrigée) avec probabilité $\frac{1}{3}$. On note Y_i le nombre d'erreur restant sur une page après i relectures. Déterminer, pour tous $(j, k) \in \mathbf{N}^2$, la probabilité $\mathbf{P}(Y_i = j \mid Y_0 = k)$.

(3) En déduire la loi de Y_1, puis celle de Y_i pour tout $i \geq 1$.

6.

(1) Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{G}(p)$ $(0 < p < 1)$. Montrer que, pour tous $k, \ell \in \mathbf{N}$, on a $\mathbf{P}(X > k + \ell \mid X > \ell) = \mathbf{P}(X > k)$. On dit que la loi géométrique est *sans mémoire*.

(2) Réciproquement, montrer que les seules lois sans mémoire sont les lois géométriques.

7. Soient X et Y deux variales aléatoires sur le même univers. On suppose que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ avec $\lambda, \mu \in \mathbf{R}_+^\star$. On suppose enfin que X et Y sont indépendantes, c'est-à-dire que, pour tous $x, y \in \mathbf{N}$, $\mathbf{P}(X = x \cap Y = y) = \mathbf{P}(X = x) \times \mathbf{P}(Y = y)$. Déterminer la loi de probabilité de $X + Y$.

8.

(1) Déterminer trois réels α, β, γ tels que, pour tout $k \in \mathbf{N}^\star$,

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{\alpha}{k} + \frac{\beta}{k+1} + \frac{\gamma}{k+2}.$$

(2) Soit X une variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega) = \mathbf{N}^\star$ et, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{a}{k(k+1)(k+2)}.$$

Déterminer a.

(3) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? une variance ? Les calculer le cas échéant.

9. Une entreprise dispose d'une flotte de 1 000 véhicules. Elle estime que, chaque jour, la probabilité qu'un véhicule ait un accident est de 4‰. On suppose les accidents indépendants, on néglige la probabilité qu'un véhicule ait plusieurs accidents la même journée, et on note N la variable aléatoire correspondant au nombre de véhicules de la société accidentés en une journée.

(1) Quelle est la loi de probabilité exacte de N ? En déduire $\mathbf{E}(N)$ et $\mathbf{V}(N)$.

(2) Donner une loi de probabilité permettant d'approcher la loi de N. Justifier.

(3) À l'aide de cette approximation :

(a) Calculer la probabilité que la flotte connaisse 4 accidents en une journée.

(b) Calculer la probabilité poue que le nombre d'accidents en une journée soit au plus égal à 5, sachant qu'il est au moins égal à 2.

(c) Déterminer le plus petit entier k tel que $\mathbf{P}(N > k) \leq 0{,}01$.