1. (lemme de Riemann-Lebesgue) Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a;b]$, montrer que
$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)e^{int}\,\mathrm{d}t = 0.$$

2. Déterminer les séries de Fourier des signaux 2π-périodiques suivantes :

(1) $f(x) = \cos^3(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$;

(2) créneau : $f(x) = 0$ si $x \in \,]-\pi;0]$ et 1 si $x \in \,]0;2\pi]$;

(3) dents de scie : $f(x) = x$ si $x \in \,]-\pi;\pi]$;

(4) triangle : $f(x) = |x|$ si $x \in \,]-\pi;\pi]$.

3. Soit $\lambda \in \mathbf{R}^\star$. On note f la fonction 2π-périodique sur $\mathbf{R}$ définie par $f(x) = \mathrm{ch}(\lambda x) = \frac{1}{2}(e^{\lambda x} + e^{-\lambda x})$ pour tout $x \in \,]-\pi;\pi]$. Déterminer la série de Fourier de f et en déduire la somme de la série de terme général $\frac{1}{n^2+\lambda^2}$.

4. On fixe $\theta \in \,]0;\pi[$ et on considère l'application $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ paire et 2π-périodique telle que, pour tout $x \in [0;\pi]$,
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0;\theta] \\ 0 & \text{si } x \in \,]\theta;\pi] \end{cases}$$

(1) Représenter graphiquement la restriction de f à $[-\pi;2\pi]$.

(2) Déterminer la série de Fourier de f.

(3) Étudier la convergence de cette série.

(4) En déduire, pour tout $\theta \in \,]0;\pi[$, la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n\theta)}{n}$.

(5) Déterminer, pour tout $\theta \in \,]0;\pi[$, la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2(n\theta)}{n^2}$. Que remarque-t-on dans le cas où $\theta = 1$?

5. Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction f 2π-périodique telle que, pour tout $x \in [-\pi;\pi]$, $f(x) = x(\pi - x)(\pi + x)$.

En déduire la valeur des sommes $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}$.

6. Soit $T > 0$ et soient $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ deux suites réelles. Montrer qu'il existe *au plus* une application $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue et T-périodique dont les coefficients de Fourier soient les nombres $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$. Existe-t-il toujours *au moins* une telle fonction ? Que dire si on remplace l'hypothèse « continue » par « continue par morceaux » ?

7. Soit $\alpha \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}$. On s'intéresse à la fonction f 2π-périodique telle que, pour tout $x \in [-\pi;\pi[$, $f(x) = \cos(\alpha x)$. Déterminer la série de Fourier de f, puis la somme de cette série.

8. (un cas particulier du théorème de Weierstrass)

(1) On considère la fonction $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = |\sin(\pi x)|$. Déterminer la série de Fourier de f et la somme de cette série.

(2) Soient $n \in \mathbf{N}$ et $t \in \mathbf{R}$. Exprimer $\cos(2\pi nt)$ sous la forme d'un polynôme en $\sin(\pi t)$.

(3) En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme P tel que, pour tout $x \in [-1;1]$, $\big||x| - P(x)\big| \le \varepsilon$.