

1. Soient $a, b, c \in \mathbf{C}$. Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{aligned}
 d_1 &= \begin{vmatrix} 7 & 11 \\ -8 & 4 \end{vmatrix}; & d_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix}; & d_3 &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}; & d_4 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}; \\
 d_5 &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}; & d_6 &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}; & d_7 &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}; \\
 d_8 &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}; & d_9 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}; & d_{10} &= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}; \\
 d_{11} &= \begin{vmatrix} 10 & 5 & -5 & 15 \\ -2 & 7 & 3 & 0 \\ 8 & 14 & 0 & 2 \\ 0 & -21 & 1 & -1 \end{vmatrix}; & d_{12} &= \begin{vmatrix} a & a & b & 0 \\ a & a & 0 & b \\ c & 0 & a & a \\ 0 & c & a & a \end{vmatrix}; & d_{13} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 3 \\ b & a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbf{N}$. Soient $a, b, a_1, \dots, a_n \in \mathbf{C}$. Calculer les déterminants suivants, de taille n :

$$d_{14} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \end{vmatrix}; \quad d_{15} = \begin{vmatrix} 1 & & & 1 \\ 1 & \ddots & (0) & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad d_{16} = \begin{vmatrix} a+b & a & \cdots & a \\ a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}.$$

3. Soit $a \in \mathbf{R}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note Δ_n le déterminant suivant, de taille n :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & a & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1 \\ n-1 & \cdots & 2 & 1 & a \end{vmatrix}.$$

- (1) Calculer Δ_1 et Δ_2 .
- (2) Déterminer, pour tout $n \geq 1$, une expression de Δ_{n+1} en fonction de Δ_n .
- (3) Montrer que, pour tout $n \geq 2$,

$$\Delta_n = a^n - a^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} k^2.$$

Solutions. $d_1 = 116$; $d_2 = -18$; $d_3 = 6$; $d_4 = 14$; $d_5 = 96$; $d_6 = 1$; $d_7 = -12$; $d_8 = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$; $d_9 = -1$; $d_{10} = -16$; $d_{11} = 7700$; $d_{12} = b^2c^2 - 4a^2bc$; $d_{13} = 4a^3 + 27b^2$.
 $d_{14} = (-1)^{n+1}a_1(a_2 - a_1)^{n-1}$; $d_{15} = 1 + (-1)^{n+1}$; $d_{16} = (na + b)b^{n-1}$.