1. Montrer la convergence et calculer la somme des séries :

$$\sum \frac{1}{n^2-1}; \qquad \sum \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}; \qquad \sum \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right); \qquad \sum \frac{1}{5^n}; \qquad \sum \frac{2^n}{3^{n-2}}.$$

2. Donner la nature des séries suivantes :

$$\sum \frac{n}{n^2+1}; \qquad \sum n^2 e^{-n}; \qquad \sum \frac{|\sin n|}{n\sqrt{n}}; \qquad \sum \cos\frac{1}{n^2}; \qquad \sum \sin\frac{1}{n^2};$$

$$\sum \frac{n^2+1}{n^2}; \qquad \sum \frac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3}; \qquad \sum \left(1-\frac{1}{n}\right)^n; \qquad \sum \left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right); \qquad \sum \ln(1+e^{-n})$$

$$\sum \frac{1}{\ln n}; \qquad \sum \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right); \qquad \sum \left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right); \qquad \sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}.$$

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. On suppose que :

- $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est alternée, c'est-à-dire que $\forall\, n \in \mathbf{N}\ (-1)^n u_n \geq 0$:
- $(|u_n|)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante ;
- $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

(1) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ sont adjacentes.

(2) En déduire que la série $\sum u_n$ est convergente.

(3) Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente.

(4) Montrer que la série $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{2n+1}\right)$ est convergente.

4. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$.

(1) Montrer que $u_n \sim v_n$.

(2) Montrer que $\sum u_n$ converge (on pourra utiliser l'exercice précédent).

(3) Montrer que $\sum v_n$ diverge. Qu'en conclure ?

5. On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer la convergence et calculer la somme de

$$\sum \frac{1}{n^2(n+1)^2}.$$