**1.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice possédant une unique valeur propre. À quelle condition est-elle diagonalisable ?

**2.** Justifier que les matrices suivantes sont diagonalisables et les diagonaliser.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -8 & -6 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix};$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

**3.** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & -1 & f \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. À quelle condition $A$ est-elle diagonalisable ?

**4.** Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$. Montrer que $A$ est diagonalisable et calculer ses valeurs propres ; en déduire qu'il existe une matrice $B$ telle que $B^3 = A$.

**5.** Dans $E = \mathbf{K}_n[X]$, on considère l'endomorphisme $u$ défini par $u(P) = (X^2 - 1)P'' + (2X + 1)P'$. Déterminer la matrice de $u$ dans la base canonique de $E$, puis montrer que $u$ est diagonalisable.

**6.** Soit $A \in \mathbf{K}$. Dans $E = \mathbf{K}_n[X]$, on considère l'endomorphisme $u$ défini par $u(P) = (X - a)P'$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $u$.

**7.** Trigonaliser la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

**8.** Déterminer les suites vérifiant les propriétés suivantes :

(1) $\begin{cases} u_0 = 1;\ u_1 = 2; \\ \forall n \in \mathbf{N}\ u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n \end{cases}$

(2) $\begin{cases} u_0 = -1;\ u_1 = 0; \\ \forall n \in \mathbf{N}\ u_{n+2} = 4(u_{n+1} - u_n) \end{cases}$

(3) $\begin{cases} u_0 = 1;\ u_1 = 1; \\ \forall n \in \mathbf{N}\ u_{n+2} = 2(u_{n+1} - u_n) \end{cases}$

**9.** Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

(1) Calculer $A^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

(2) Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par $u_0 = -2$, $v_0 = 4$, $w_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n + 2v_n + w_n \\ v_{n+1} = 2u_n - v_n - w_n \\ w_{n+1} = -4u_n + 4v_n + 3w_n. \end{cases}$$

Déterminer l'expression de $u_n$, $v_n$ et $w_n$ en fonction de $n$.