1. Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t; \qquad I_2 = \int_0^1 \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t; \qquad I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^3\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

$$I_4 = \int_0^1 \frac{t^2+1}{t}\,\mathrm{d}t; \qquad I_5 = \int_0^1 \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t; \qquad I_6 = \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{\cos t}}{t}\,\mathrm{d}t; \qquad I_7 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{e^t+t^2e^{-t}}$$

$$I_8 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-\sqrt{t}}; \qquad I_9 = \int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t; \qquad I_{10} = \int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{1+t^2}{1+t^3}\right)$$

2. Justifier la convergence et calculer les valeurs des intégrales suivantes :

$$J_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}; \qquad J_2 = \int_0^{+\infty} te^{-t^2}\,\mathrm{d}t; \qquad J_3 = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos t}{\sqrt{\sin t}}\,\mathrm{d}t$$

3.

(1) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

(2) Calculer cette intégrale à l'aide du changement de variables $t = \tan\theta$.

4.

(1) Montrer que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{4t}{t^4-1}\,\mathrm{d}t$ converge.

(2) Vérifier que, pour tout $t > 2$,
$$\frac{4t}{t^4-1} = \frac{-2t}{t^2+1} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1}.$$

(3) En déduire la valeur de l'intégrale.

5. Fonction Gamma.

(1) Déterminer les valeurs de $x \in \mathbf{R}$ pour lesquelles l'intégrale $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

(2) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ (on pourra procéder par intégration par parties).

(3) En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.

6. On considère $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$.

(1) Montrer que I est convergente.

(2) Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t$.

(3) Montrer que $2I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right)\mathrm{d}t$.

(4) En déduire la valeur de I.

Solutions. **1**. I_1 : cv ; I_2 : cv ; I_3 : cv ; I_4 : dv ; I_5 : dv ; I_6 : dv ; I_7 : cv ; I_8 : dv ; I_9 : cv ; I_{10} : dv ; **2**. $J_1 = \pi$; $J_2 = \frac{1}{2}$; $J_3 = 2^{3/4}$; **3**. $\frac{\pi}{4}$; **4**. $\ln 5 - \ln 3$; **6**. $-\frac{\pi}{2}\ln 2$.