1. Une entreprise emploie dix salariée·es : 3 ingénieur·es, 2 secrétaires, 5 technicien·es. La direction désigne au hasard trois de ces salarié·es pour participer au comité social et économique de l'entreprise[1]. On note X le nombre de secrétaires et Y le nombre d'ingénieur·es participant au comité.

(1) Déterminer la loi conjointe, puis les lois marginales du couple (X, Y).

(2) En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire $X + Y$.

2. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes dont les lois de probabilité sont les suivantes :

x	1	2
$\mathbf{P}(X = x)$	0,7	0,3

y	-2	5	8
$\mathbf{P}(Y = y)$	0,3	0,5	0,2

Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y). Vérifier par le calcul que $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

3. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur un espace probabilisé fini Ω. On suppose que X et Y suivent la loi $\mathcal{B}(2, \frac{1}{2})$. On pose $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$. Déterminer $\mathbf{E}(Z)$.

4. On considère le couple de variables aléatoires (X, Y) dont la loi conjointe est donnée dans le tableau ci-dessous.

$X \backslash Y$	0	1	2	3
1	0,1	0,2	0,1	0,1
2	0,1	0	0	0,1
3	0,1	0	0,2	0

(1) Déterminer les lois marginales du couple (X, Y). Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

(2) Calculer l'espérance et la variance de X et de Y.

(3) Écrire les lois conditionnelles de X sachant $(Y = y)$ et de Y sachant $(X = x)$ pour tous $x \in [\![1; 3]\!]$ et $y \in [\![0; 3]\!]$.

(4) Déterminer la loi de $U = XY$.

(5) Déterminer la loi de $V = \min(X, Y)$.

(6) Représenter sous forme d'un tableau la loi conjointe de U et V.

(7) Déterminer $\mathrm{Cov}(X, Y)$ et $\rho(X, Y)$.

5. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles de variances non nulles sur un espace probabilisé fini ; soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ quatre réels, α et γ étant non nuls. On pose $U = \alpha X + \beta$ et $V = \gamma Y + \delta$. Comparer $\rho(U, V)$ et $\rho(X, Y)$.

6. On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) de loi décrite dans le tableau ci-dessous.

$X \backslash Y$	1	2	3
1	0	a	0,1
2	a	0,3	0,1
3	0,1	0,2	0

(1) Déterminer a.

(2) Donner les lois marginales du couple (X, Y).

(3) Calculer espérance et variance de X et Y.

(4) Calculer $\mathbf{E}(XY)$, puis $\mathrm{Cov}(X, Y)$ et $\rho(X, Y)$. Les variables aléatoires X et Y sont-elles corrélées ? indépendantes ?

1. ce qui est illégal, ces représentant·es devant être élue·es par les salarié·es

7. On jette n fois un dé dont les faces comportent uniquement les chiffres 1, 2 et 3. On note p, q et r les probabilités respectives d'obtenir 1, 2 et 3 (on a alors $p+q+r=1$). On appelle X et Y les variables aléatoires égales respectivement au nombre de 1 et au nombre de 2 obtenurs au cours des n lancers.

(1) Déterminer les lois de X et de Y.
(2) Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).
(3) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

8. Une urne contient n jetons ($n \geq 2$) numérotés de 1 à n. On prélève une poignée aléatoire de jetons, et on note N le nombre de jetons prélevés et S la somme de leurs valeurs (on convient qu'on peut prélever une poignée vide et qu'on a alors $N = S = 0$).

Dans les questions (1) à (4), on suppose toutes les poignées possibles équiprobables.

(1) Déterminer la loi de probabilité de N, puis son espérance et sa variance.
(2) Pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la poignée tirée contient le jeton numéroté i, et 0 sinon. Quelle est la loi de probabilité de X_i ?
(3) En déduire l'espérance de S.
(4) Montrer que les variables aléatoires X_i sont mutuellement indépendantes. En déduire $\mathbf{V}(S)$.

Dans les questions (5) à (7), on suppose que N suit la loi uniforme (autrement dit, que ce sont *les tailles* des poignées qui sont équiprobables).

(5) Quelle est l'espérance de N ?
(6) Pour tout $k \in [\![0; n]\!]$ et pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, calculer $\mathbf{P}_{N=k}(X_i = 1)$.
(7) En déduire la loi de probabilité de X_i.
(8) Les variables aléatoires X_i sont-elles mutuellement indépendantes ?
(9) Dans cette question, on suppose $n = 3$. Déterminer la loi de probabilité de S dans chacun des deux cas étudiés précédemment.

9. Soient A et B deux variables aléatoires réelles indépendantes sur un espace probabilisé fini Ω, suivant toutes les deux la loi $\mathcal{U}([\![-3; 3]\!])$. Quelle est la probabilité pour que l'équation $x^3 - Ax + B = 0$ admette une racine au moins double réelle ?

10. ($\star$) On considère un ensemble E formé de m boules blanches et n boules noires. En dénombrant de deux façons différentes l'ensemble $\mathcal{F}$ des parties de E constituées de k boules, montrer l'identité :

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=\max(0,k-n)}^{\min(k,m)} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}.$$

11. ($\star$) On considère deux variables aléatoires X et Y sur un même espace probabilisé fini, suivant respectivement les lois $\mathcal{B}(m, p)$ et $\mathcal{B}(n, p)$. Montrer que $X + Y$ suit la loi $\mathcal{B}(m + n, p)$.

12. ($\star$) Soient X_1, X_2 et X_3 trois variables aléatoires réelles sur un univers fini Ω. On suppose X_1, X_2 et X_3 mutuellement indépendantes. Montrer que $X_1 + X_2$ et X_3 sont indépendantes.