

1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\begin{aligned}
 S_1: \sum \frac{z^n}{\sqrt{n}}; & \quad S_2: \sum \frac{n!}{(2n)!} z^n; & \quad S_3: \sum (\ln n) z^n; & \quad S_4: \sum n^3 n! z^n \\
 S_5: \sum \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n; & \quad S_6: \sum \frac{\ln n}{\ln(n+1)} z^n; & \quad S_7: \sum (1+i)^n z^n; & \quad S_8: \sum \frac{(-2)^n}{n+1} z^{3n+1}; \\
 S_9: \sum \frac{n^2+1}{3^n} z^n; & \quad S_{10}: \sum \frac{\ln n}{n^2} z^n; & \quad S_{11}: \sum \frac{\ln n}{n^2} z^{2n}.
 \end{aligned}$$

2. Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle convergeant vers un réel  $\ell \neq 0$ . Déterminer le rayon de convergence de la série  $\sum a_n x^n$ .

3. Déterminer le rayon de convergence, puis exprimer à l'aide des fonctions usuelles la somme des séries entières suivantes :

$$\sum \frac{n-1}{n} x^n; \quad \sum \frac{n+2}{n+1} x^n; \quad \sum \frac{(n+1)(n-2)}{n!} x^n; \quad \sum \frac{(-1)^n}{2^n n!} x^{2n}.$$

4. Montrer la convergence et déterminer la somme des séries numériques suivantes :

$$\sum \frac{1}{2^n n!}; \quad \sum \frac{n}{2^n}; \quad \sum \frac{n^2}{2^n}; \quad \sum \frac{(-1)^n}{n(n-1)}.$$

5. Développer en série entière les fonctions suivantes (préciser le rayon de convergence) :

$$\begin{aligned}
 f_1: x \mapsto \ln(1+2x); & \quad f_2: x \mapsto \frac{1}{a-x} \quad (a \neq 0); & \quad f_3: x \mapsto \frac{e^x}{1-x}; \\
 f_4: x \mapsto \arctan(x+1); & \quad f_5: x \mapsto (4+x^2)^{-3/2}.
 \end{aligned}$$

6. Déterminer toutes les solutions développables en série entière en 0 des équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned}
 (E_1): y'' + xy' + y = 1; & \quad (E_2): x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0; \\
 (E_3): xy'' + 2y' - xy = 0; & \quad (E_4): x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0.
 \end{aligned}$$

7. Montrer que les fonctions suivantes sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  :

$$f_1: x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon;} \end{cases} \quad f_2: x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} & \text{si } 0 < |x| < \pi \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$