1. Soient $F\colon I \to \mathbf{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $a \in I$. Soit $p = \min\{k \in \mathbf{N}^\star \mid F^{(k)}(a) \neq 0\}$. Exprimer à l'aide de $F^{(p)}(a)$ un paramétrage, puis une équation cartésienne de la tangente à l'arc paramétré par F au point de paramètre $t = a$.

2. Tracer les courbes paramétrées suivantes :

$$\mathcal{C}\colon \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \qquad \textit{(cycloïde)}$$

$$\mathcal{C}\colon \begin{cases} x = \dfrac{t+t^3}{1+t^4} \\ y = \dfrac{t-t^3}{1+t^4} \end{cases} \qquad \textit{(lemniscate de Bernoulli)}$$

$$\mathcal{C}\colon \begin{cases} x = 3\cos t - \cos(3t) \\ y = 3\sin t - \sin(3t) \end{cases} \qquad \textit{(néphroïde)}$$

$$\mathcal{C}\colon \begin{cases} x = \dfrac{t}{1+t^3} \\ y = \dfrac{t^2}{1+t^3} \end{cases} \qquad \textit{(folium de Descartes)}$$

$$\mathcal{C}\colon \begin{cases} x = \cos t \times (1+\cos t) \\ y = \sin t \times (1+\cos t) \end{cases} \qquad \textit{(cardioïde)}$$

3.

(1) Déterminer la longueur d'une « arche » de cycloïde.
(2) Déterminer la longueur de la cardioïde.
(3) Exprimer à l'aide d'une intégrale la longueur de la « feuille » du folium de Descartes (on ne demande pas de calculer la valeur de cette intégrale).

4. Montrer que la courbe paramétrée $\mathcal{C}\colon \begin{cases} x = 2t - \frac{1}{t^2} \\ y = 2t + t^2 \end{cases}$ admet un point double et en donner les coordonnées.

5. Tracer la *courbe de Lissajous*

$$\mathcal{C}\colon \begin{cases} x = \sin(at) \\ y = \sin(bt) \end{cases}$$

pour $(a, b) = (1, 2)$, puis $(a, b) = (2, 3)$.