1.

(1) La fonction arctangente est définie et dérivable sur $\mathbf{R}$ tout entier. En revanche, $x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie et dérivable sur $\mathbf{R}^\star$. On en déduit, par théorème de composition, que f est définie et dérivable sur $\mathbf{R}^\star$.

(2) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, d'après la formule de dérivation des fonctions composées,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \arctan'(x) - \frac{1}{x^2}\arctan'\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{1+(1/x)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

La dérivée de f est donc bien constamment nulle. Piège : on en déduit que f est constante ?

(3) $f(1) = 2\arctan 1 = \frac{\pi}{2}$; $f(-1) = 2\arctan(-1) = -\frac{\pi}{2}$. On a $f(1) \neq f(-1)$, cela contredit le fait que f soit constante !

L'erreur : le théorème « $f' = 0$ donc f constante » n'est valable que sur un intervalle, ce que $\mathbf{R}^\star$ n'est pas.

Correction : f est constante sur chaque intervalle de son domaine de définition ; autrement dit, elle est constante sur $\mathbf{R}_-^\star$, égale à $-\frac{\pi}{2}$, et sur $\mathbf{R}_+^\star$, égale à $\frac{\pi}{2}$.

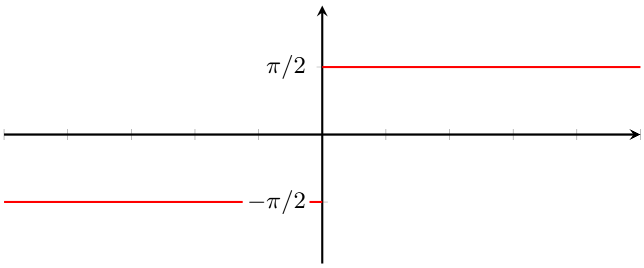

FIGURE 1. Représentation graphique de f

2.

(1) Pour tout $i \in [\![1;10]\!]$, notons V_i l'événement « le i-ème projet de vaccin aboutit ». Pour tout i, on a $\mathbf{P}(V_i) = 0{,}1$. La probabilité recherchée est celle de l'événement $V = V_1 \cup \cdots \cup V_{10}$.

Comme souvent lorsqu'il s'agit de calculer la probabilité d'une union, il est plus simple de passer par l'événement contraire. En effet, en vertu des lois de Morgan,

$$\overline{V} = \overline{V_1 \cup \cdots \cup V_{10}} = \overline{V}_1 \cap \cdots \cap \overline{V}_{10}.$$

Les événements V_i étant mutuellement indépendants par hypothèse, on a donc

$$\mathbf{P}(\overline{V}) = \mathbf{P}(\overline{V}_1 \cap \cdots \cap \overline{V}_{10}) = \mathbf{P}(\overline{V}_1) \times \cdots \times \mathbf{P}(\overline{V}_{10}) = 0{,}9^{10} \simeq 0{,}35.$$

On en déduit $\mathbf{P}(V) = 1 - \mathbf{P}(\overline{V}) = 1 - 0{,}9^{10} \simeq 0{,}75$. La probabilité qu'au moins un des projets de vaccin aboutisse est donc d'environ 75% ; contrairement aux affirmations de Shattock, c'est donc loin d'être une certitude.

(2) Le calcul précédent se généralise immédiatement au cas de n projets de vaccins ; dans ce cas, la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux aboutisse est $\mathbf{P}(V) = 1 - 0{,}9^n$. Il s'agit donc de résoudre l'inéquation $\mathbf{P}(V) \geq 0{,}99$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(V) \geq 0{,}99 &\iff 1 - 0{,}9^n \geq 1 - 10^{-2} \iff 0{,}9^n \leq 10^{-2} \\ &\iff n\ln 0{,}9 \leq -2\ln 10 \quad \text{(on compose par la fonction ln, qui est croissante)} \\ &\iff n \geq -2\frac{\ln 10}{\ln 0{,}9} \simeq 43{,}7 \quad \text{(on divise par } \ln 0{,}9 < 0\text{).} \end{aligned}$$

Autrement dit, il faudrait mener au moins 44 projets de vaccin en parallèle pour avoir 99% de certitude qu'au moins l'un d'entre eux aboutisse.

3. On va utiliser la formule d'Euler, puis le binôme de Newton. Pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}\cos^3 t &= \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{it}+e^{-it}\right)^3 \\ &= \frac{1}{8}\left[\binom{3}{0}e^{0it}e^{-3it} + \binom{3}{1}e^{it}e^{-2it} + \binom{3}{2}e^{2it}e^{-it} + \binom{3}{3}e^{3it}e^{-0it}\right] \\ &= \frac{1}{8}\left(e^{-3it}+3e^{-it}+3e^{it}+e^{3it}\right) = \frac{1}{8}(\underbrace{e^{3it}+e^{-3it}}_{=2\cos(3t)}+3(\underbrace{e^{it}+e^{-it}}_{=2\cos t})) \\ &= \frac{1}{4}\cos(3t)+\frac{3}{4}\cos t.\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\cos^3 t\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\cos(3t)\,\mathrm{d}t + \frac{3}{4}\int_0^{\pi/2}\cos t\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{\sin(3t)}{3}\right]_0^{\pi/2} + \frac{3}{4}\left[\sin t\right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{-1-0}{3}+\frac{3}{4}(1-0) \\ &= -\frac{1}{12}+\frac{3}{4} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

4. Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, notons R_i (resp. B_i) l'événément « obtenir une boule rouge (resp. bleue) au i-ème tirage ». Comme la boule tirée est remise dans l'urne à chaque fois, on a, pour tout i, $\mathbf{P}(B_i) = \frac{b}{b+r}$ et $\mathbf{P}(R_i) = \frac{r}{b+r}$.

(1) On cherche $\mathbf{P}(R_1 \cap \cdots \cap R_n)$. Les tirages étant mutuellement indépendants, on a

$$\mathbf{P}(R_1 \cap \cdots \cap R_n) = \mathbf{P}(R_1) \times \cdots \times \mathbf{P}(R_n) = \left(\frac{r}{b+r}\right)^n.$$

(2) Commençons par une situation plus restrictive et calculons la probabilité que les k premières boules tirées soient bleues, et les $n-k$ suivantes rouges. Il s'agit (comme il y a indépendance) de

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(B_1 \cap \cdots \cap B_k \cap R_{k+1} \cap \cdots \cap R_n) &= \mathbf{P}(B_1) \times \cdots \times \mathbf{P}(B_k) \times \mathbf{P}(R_{k+1} \times \cdots \times \mathbf{P}(R_n) \\ &= \left(\frac{b}{b+r}\right)^k \left(\frac{r}{b+r}\right)^{n-k} = \frac{b^k r^{n-k}}{(b+r)^n}.\end{aligned}$$

Maintenant, tirer « d'abord tout bleu, puis tout rouge » n'est pas l'unique façon d'obtenir k boules bleues. On peut par exemple commencer par toutes les rouges et finir par toutes les bleues, ou encore alterner, etc. Il existe autant de façons différentes de procéder que de choix de k tirages destinés à être bleus parmi les n tirages effectués au total, c'est-à-dire $\binom{n}{k}$. La probabilité d'obtenir chacun de ces tirages est toujours $\frac{b^k r^{n-k}}{(b+r)^n}$; au final, la probabilité d'obtenir l'un de ces tirages est donc

$$\binom{n}{k}\frac{b^k r^{n-k}}{(b+r)^n}.$$

5. On commence par l'équation homogène, que l'on met sous forme normalisée, en vérifiant au passage qu'il n'y a pas de problèmes d'intervalle de définition ($x \in]-1;1[$ donc le dénominateur ne s'annule pas) :

$$(E_0) \iff y' - \frac{x}{1-x^2}y = 0.$$

Il s'agit de trouver une primitive de l'expression $a(x) = -\frac{x}{1-x^2}$. On reconnaît (aux coefficients multiplicatifs près) une expression de la forme $\frac{u'}{u}$, on cherche donc une primitive à partir de

$\ln u$, c'est-à-dire $\ln(1-x^2)$. En dérivant cette expression, on trouve $\frac{-2x}{1-x^2} = 2a(x)$. Une primitive correcte est donc $A(x) = \frac{1}{2}\ln(1-x^2)$.

On en déduit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$. On simplifie : pour tout $x \in \left]-1;1\right[$,

$$e^{-A(x)} = e^{-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)} = \left(e^{\ln(1-x^2)}\right)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

L'ensemble des solutions de l'équation homogène est donc

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ x \mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}} \;\middle|\; \lambda \in \mathbf{R} \right\}.$$

Pour la solution générale, on procède maintenant par variation de la constante. Soit λ une fonction dérivable sur $\left]-1;1\right[$. On pose, pour tout $x \in \left]-1;1\right[$, $y(x) = \frac{\lambda(x)}{\sqrt{1-x^2}}$. Alors

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (E) &\iff \forall x \in \left]-1;1\right[\;\; (1-x^2)y'(x) - xy(x) = 1 \\
&\iff \forall x \in \left]-1;1\right[\;\; (1-x^2)\left(\frac{\lambda'(x)\sqrt{1-x^2} + \frac{x\lambda(x)}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}\right) - x\frac{\lambda(x)}{\sqrt{1-x^2}} = 1 \\
&\iff \forall x \in \left]-1;1\right[\;\; \lambda'(x)\sqrt{1-x^2} + \frac{x\lambda(x)}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x\lambda(x)}{\sqrt{1-x^2}} = 1 \\
&\iff \forall x \in \left]-1;1\right[\;\; \lambda'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
&\iff \exists c \in \mathbf{R} \;\; \forall x \in \left]-1;1\right[\;\; \lambda(x) = \arccos x + c \\
&\iff \exists c \in \mathbf{R} \;\; \forall x \in \left]-1;1\right[\;\; y(x) = \frac{\arccos x + c}{\sqrt{1-x^2}}.
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle sur $\left]-1;1\right[$ est donc

$$\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto \frac{\arccos x + c}{\sqrt{1-x^2}} \;\middle|\; c \in \mathbf{R} \right\}.$$

6. Soient $a, b \in \mathbf{R}$. Alors, pour tout $t \in \mathbf{R} \setminus \{\pm 1\}$,

$$\frac{a}{t-1} + \frac{b}{t+1} = \frac{a(t+1) + b(t-1)}{t^2-1} = \frac{(a+b)t + (a-b)}{t^2-1}.$$

Par identification,

$$\begin{aligned}
\forall t \neq \pm 1 \;\; \frac{1}{t^2-1} = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t+1} &\iff \forall t \neq \pm 1 \;\; (a+b)t + (a-b) = 1 \\
&\iff \begin{cases} a+b = 0 & \text{(coef. en } t\text{)} \\ a-b = 1 & \text{(coef. constant)} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

On peut donc écrire, pour tout $t \neq \pm 1$,

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t+1}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
\int_2^3 \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} &= \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{\mathrm{d}t}{t-1} - \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{\mathrm{d}t}{t+1} = \frac{1}{2}\Big[\ln(t-1)\Big]_2^3 - \frac{1}{2}\Big[\ln(t+1)\Big]_2^3 \\
&= \frac{1}{2}(\ln 2 - 0) - \frac{1}{2}(\ln 4 - \ln 3) = \frac{\ln 2}{2} - \frac{2\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{2} \\
&= \frac{\ln 3 - \ln 2}{2} \simeq 0{,}20.
\end{aligned}$$

7. On pourrait théoriquement développer directement la formule $(2+2i)^7$ à l'aide du binôme de Newton, mais c'est un calcul long et pénible. L'idée est de se souvenir que l'écriture algébrique d'un nombre complexe est plutôt adaptée aux additions et soustractions, tandis que les multiplications (donc les puissances) sont plus facile à partir de la forme trigonométrique.

Cherchons donc la forme trigonométrique du nombre $2+2i$. On commence par le module :

$$|2+2i| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

On divise maintenant le nombre par son module et on cherche à reconnaître des valeurs particulières des fonctions cosinus et sinus :

$$\frac{2+2i}{|2+2i|} = \frac{2+2i}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = e^{i\pi/4}.$$

Au final, $2+2i = 2\sqrt{2}e^{i\pi/4} = 2^{3/2}e^{i\pi/4}$, donc

$$\begin{aligned}(2+2i)^7 &= \left(2^{3/2}e^{i\pi/4}\right)^7 = 2^{21/2}e^{i7\pi/4} = 2^{10}2^{1/2}\underbrace{e^{8\pi/4}}_{=1}e^{-\pi/4} \\ &= 1\,024\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1\,024 - 1\,024\,i.\end{aligned}$$

8. Une application linéaire p est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$; matriciellement, M est la matrice d'un projecteur si et seulement si $M^2 = M$. Calculons donc :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M,$$

donc M est bien la matrice d'un projecteur. On rappelle que la projection a lieu sur $\operatorname{Ker}(M-I_3)$, parallèlement à $\operatorname{Ker} M$.

Soit $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{R}^3$. Alors

$$X \in \operatorname{Ker} M \iff \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -y-z = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff y = z = 0.$$

Ainsi,

$$\operatorname{Ker} M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; y = z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbf{R} \right\} = \operatorname{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right].$$

De même,

$$X \in \operatorname{Ker}(M-I_3) \iff \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -x-y-z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff x+y+z = 0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}(M-I_3) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x+y+z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x = -y-z \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; y, z \in \mathbf{R} \right\} = \left\{ y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; y, z \in \mathbf{R} \right\} \\ &= \operatorname{Vect}\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right].\end{aligned}$$

La matrice M est donc la matrice de la projection sur $\mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} -1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\0\\1\end{pmatrix}\right]$, parallèlement à $\mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1\\0\\0\end{pmatrix}\right]$.

9. `https://youtu.be/yKf9aUIxdb4`

10. Le rang de u est la dimension de son image. On rappelle que l'image d'une application est un sous-espace vectoriel de son espace d'arrivée (qui est ici $\mathbf{K}$, puisque u est une forme linéaire). On en déduit que $\mathrm{Im}\, u$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}$, donc que $\mathrm{rg}\, u \leq \dim \mathbf{K} = 1$. Le rang de u ne peut donc être que 0 ou 1.

Si $\mathrm{rg}\, u = 0$, cela signifie que $\mathrm{Im}\, u$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}$ de dimension 0. Or le seul espace vectoriel de dimension 0 est l'espace vectoriel nul. On a donc $\mathrm{Im}\, u = \{0\}$. Concrètement, cela signifie que pour tout $x \in E$, $u(x) = 0$, autrement dit que u est la forme linéaire nulle.

Si $\mathrm{rg}\, u = 1$, cela signifie que $\mathrm{Im}\, u$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}$, dont la dimension est égale à celle de $\mathbf{K}$. La seule possibilité est que $\mathrm{Im}\, u = \mathbf{K}$; autrement dit, u est surjective.

11. Toutes les distances étant en mètres et toutes les durées en secondes, on s'abstient de mentionner les unités dans le calcul.

(1) La distance étant de $x_0 = 100$ et la vitesse de la flèche de 100, on en déduit que $t_0 = \frac{100}{100} = 1$.

(2) La vitesse de la tortue est égale à 1. Au cours de l'intervalle t_0, elle parcourt donc une distance $x_1 = 1 \cdot t_0 = t_0$.

(3) La vitesse de la flèche est toujours égale à 100, d'où $t_1 = \frac{x_1}{100} = \frac{t_0}{100}$.

(4) De même qu'à la question (2), $x_2 = t_1 = \frac{t_0}{100}$.

...

(α) On généralise immédiatement les questions précédentes : pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $x_{n+1} = \frac{x_n}{100}$ et $t_{n+1} = \frac{t_n}{100}$, avec $x_0 = 100$ et $t_0 = 1$; ce sont deux suites géométriques de raison $\frac{1}{100}$. On en déduit, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$x_n = \frac{100}{100^n} = \frac{1}{100^{n-1}} \quad \text{et} \quad t_n = \frac{1}{100^n}.$$

(5) Soit $N \in \mathbf{N}$. On utilise la formule pour la somme des termes d'une suite géométrique de raison différente de 1 :

$$X_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{100^{n-1}} = \frac{100 - \frac{1}{100^N}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{100^{N+1} - 1}{99 \cdot 100^{N-1}}.$$

De même,

$$T_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{100^n} = \frac{1 - \frac{1}{100^{N+1}}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{100^{N+1} - 1}{99 \cdot 100^N}.$$

(6) Pour N tendant vers $+\infty$, $1 = o(100^{N+1})$ donc

$$X_N \sim \frac{100^{N+1}}{99 \cdot 100^{N-1}} = \frac{100^2}{99}.$$

On en déduit que X_N converge vers $\frac{100^2}{99} \simeq 101$. De même, T_N converge vers $\frac{100}{99} \simeq 1{,}01$.

Concrètement, X_N et T_N représentent respectivement la distance et le temps cumulé·es de vol de la flèche après N étapes. Le fait que ces deux quantités admettent une limite finie montre que la flèche va effectivement rattraper la moue... la tortue, après avoir parcouru environ 101 mètres en 1,01 secondes.

12.

(1) $\dim \mathbf{K}_n[X] = n + 1$.

(2) Montrons que la famille $\mathcal{B}$ est libre. Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$. On suppose que le polynôme $\lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_n P_n$ est nul.

Supposons que $\lambda_n \neq 0$. Alors $\lambda_n Pn$ est de degré n ; par ailleurs, $\lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_{n-1}P_{n-1}$ est une combinaison linéaire de polynômes de degré strictement inférieur à n, donc est de degré strictement inférieur à n. On en déduit que

$$\deg(\underbrace{\lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_{n-1}P_{n-1}}_{\deg < n} + \underbrace{\lambda_n P_n}_{\deg = n}) = n,$$

ce qui est absurde puisque $\lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_n P_n = 0$ donc de degré $-\infty$. On en déduit que $\lambda_n = 0$.

Le coefficient λ_n étant nul, la combinaison linéaire se réécrit $\lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_{n-1}P_{n-1} = 0$. Par le même raisonnement, on montre que $\lambda_{n-1} = 0$ donc, par récurrence immédiate, que tous les λ_i sont nuls. La famille $\mathcal{B}$ est donc libre.

S'agissant d'une famille de $n+1$ vecteurs de E, qui est de dimension $n+1$, on en déduit immédiatement qu'il s'agit d'une base de E.

(3) Il s'agit de vérifier que, si $P \in E$, alors $u(P) \in E$ (autrement dit, $\deg u(P) \leq n$). On sait que, pour tout polynôme P, $\deg P' \leq \deg P - 1$ donc $\deg P'' \leq \deg P - 2$. Alors

$$\begin{aligned}\deg u(P) &= \deg((X^2-1)P'' + (2X+1)P') \leq \max(\deg((X^2-1)P''), \deg((2X+1)P')) \\ &\leq \max(2 + \deg P'', 1 + \deg P') \leq \max(2 + P - 2, 1 + P - 1) \\ &\leq \deg P.\end{aligned}$$

Si $P \in E$, on a donc bien $u(P) \in E$, ce qui montre que l'endomorphisme u est bien défini (on pourrait également vérifier que u est bien linéaire, mais c'est une conséquence immédiate de la linéarité de la dérivation et de la distributivité de la multiplication).

(4) Pour construire la matrice d'une application linéaire dans une base, il faut calculer les images des vecteurs de la base de départ, décomposer les résultats sur la base d'arrivée et écrire les coordonnées en colonne. Ici, la base de départ et la base d'arrivée sont la base canonique de E (c'est-à-dire $(1, X, \ldots, X^n)$), il s'agit donc d'écrire en colonnes les coefficients de $u(1), u(X), \ldots, u(X^n)$.

$u(1) = (X^2-1) \times 0 + (2X+1) \times 0 = 0$ donc la première colonne de la matrice est nulle.

$u(X) = (X^2-1) \times 0 + (2X+1) \times 1 = 2X+1$ donc la deuxième colonne de la matrice est $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Pour tout $k \geq 2$, $(X^k)' = kX^{k-1}$ donc $(X^k)'' = k(k-1)X^{k-2}$. Alors

$$\begin{aligned}u(X^k) &= (X^2-1)k(k-1)X^{k-2} + (2X+1)kX^{k-1} \\ &= (k(k-1) + 2k)X^k + kX^{k-1} - k(k-1)X^{k-2} \\ &= k(k+1)X^k + kX^{k-1} - k(k-1)X^{k-2},\end{aligned}$$

la $k+1$-ème colonne de la matrice est donc

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -k(k-1) \\ k \\ k(k+1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow k+1\text{-ème ligne} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Au final, la matrice recherchée est donc

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & -2\times 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1\times 2 & 2 & -3\times 2 & \ddots & & \vdots \\
 & 0 & 2\times 3 & 3 & & 0 & \vdots \\
\vdots & & 0 & 3\times 4 & & -(n-1)(n-2) & 0 \\
 & & & 0 & \ddots & n-1 & -n(n-1) \\
 & & & & 0 & (n-1)n & n \\
0 & & & & \cdots & 0 & n(n+1)
\end{pmatrix}$$

(5) Si P est un polynôme constant (disons égal à $\lambda \in \mathbf{K}$), alors $u(P) = \lambda u(1) = 0$. On a donc $\mathbf{K}_0[X] \subset \operatorname{Ker} u$.

Si, au contraire, P n'est pas constant, notons $d > 0$ son degré et $a_d \in \mathbf{K}^\star$ son coefficient dominant. On peut alors écrire $P = a_d X^d + Q$, avec $\deg Q < d$. D'après les calculs effectués à la question précédente, $u(P) = a_d u(X^d)$ est de degré d. Et d'après la question (3), $\deg u(Q) \leq \deg Q < d$. Alors

$$\deg(u(P)) = \deg\Big(\underbrace{a_d u(X^d)}_{\deg = d} + \underbrace{u(Q)}_{\deg < d}\Big) > 0 > -\infty$$

On a donc $u(P) \neq 0$, donc $P \notin \operatorname{Ker} u$.

Au final, on a montré que tous les polynômes constants appartiennent à $\operatorname{Ker} u$ et qu'aucun polynôme non-constant n'y appartient : on a donc $\operatorname{Ker} u = \mathbf{K}_0[X]$.

(6) D'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} u + \operatorname{rg} u = \dim E$. On sait que $\dim E = n+1$ et on a montré à la question précédente que $\dim \operatorname{Ker} u = 1$, on en déduit donc que l'application u est de rang n.

Autre méthode : la matrice déterminée à la question précédente est échelonnée, on voit qu'elle possède n pivots (le premier coefficient non nul de chaque ligne sauf la deuxième), ainsi $\operatorname{rg} u = n$.

Autre méthode : on considère la famille des vecteurs colonne de la matrice de u déterminée à la question précédente. Cette famille n'est pas libre car le premier vecteur est nul. En revanche, une fois le vecteur nul enlevé, il reste une famille de n vecteurs de $\mathbf{R}^{n+1}$ dont on peut assez facilement montrer qu'elle est libre (pour avoir une combinaison linéaire nulle, il faut que le coefficient du dernier vecteur soit nul pour avoir un zéro sur la dernière ligne, mais alors il faut que le coefficient de l'avant-dernier vecteur soit nul pour avoir un zéro sur l'avant-dernière ligne, mais alors…). Le rang de la famille des vecteurs colonne est donc n, d'où $\operatorname{rg} u = n$.

Autre méthode : on peut considérer la famille des vecteurs lignes de la matrice et montrer qu'elle est de rang n mais c'est un peu plus délicat.

13.

(1) On pose, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $\varphi(x) = x - \ln(1+x)$. Il s'agit de montrer que la fonction φ est positive ou nulle.

Par composition, φ est dérivable sur $\mathbf{R}_+$ et, pour tout $x \geq 0$, $\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geq 0$. On en déduit que φ est croissante sur $\mathbf{R}_+$: pour tout $x \geq 0$, $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0 - \ln 1 = 0$.

On a donc bien, pour tout $x \geq 0$, $\ln(1+x) \leq x$.

(2) Procédons par récurrence sur n : si $n = 1$, on a $u_1 = 1$ et $\ln(1+1) = \ln 2 \simeq 0.7$, donc la propriété est vraie.

Soit maintenant $n \in \mathbf{N}^\star$. On suppose que $\ln(n+1) \leq u_n$. Par définition, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1}$. Mais d'après la question précédente, $\frac{1}{n+1} \geq \ln(1 + \frac{1}{n+1}) = \ln \frac{n+2}{n+1}$. Par ailleurs, d'après l'hypothèse de récurrence, $u_n \geq \ln(n+1)$. On a donc

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1} \geq \ln(n+1) + \ln \frac{n+2}{n+1} = \ln\left((n+1) \cdot \frac{n+2}{n+1}\right) = \ln(n+2),$$

ce qui est bien l'inégalité recherchée au rang $n+1$.

Ainsi, on a bien $\ln(n+1) \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$.

(3) Soit $k \geq 2$. Pour tout $t \in [k-1;k]$, on a $t \leq k$ donc $\frac{1}{t} \geq \frac{1}{k}$. Par croissance de l'intégrale (car $k-1 \leq k$), on en déduit que
$$\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t} \geq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{k} = \frac{1}{k}\int_{k-1}^{k} \mathrm{d}t = \frac{1}{k}.$$

(4) L'inégalité est trivialement vraie pour $n=1$ (les deux membres sont égaux à 1). Soit donc $n \geq 2$. On va sommer l'inégalité de la question précédente pour k allant de 2 à n :
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$
Mais la somme d'intégrales se simplifie grâce à la relation de Chasles :
$$\sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_{1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \Big[\ln t\Big]_1^n = \ln n - \ln 1 = \ln n.$$
On a donc, pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq 1 + \ln n$.

(5) D'après les questions (2) et (4), on a, pour tout $n \geq 2$, l'encadrement :
$$\ln(n+1) \leq u_n \leq 1 + \ln n.$$
Par croissance de la fonction ln, on en déduit
$$\ln n \leq u_n \leq 1 + \ln n.$$
En divisant par $\ln n$ (qui est strictement positif car $n \geq 2$), on obtient alors :
$$1 \leq \frac{u_n}{\ln n} \leq 1 + \frac{1}{\ln n}.$$

Pour n tendant vers $+\infty$, le membre de gauche tend trivialement vers 1. Le membre de droite également, puisque $\ln n \longrightarrow +\infty$ donc $\frac{1}{\ln n} \longrightarrow 0$. Par théorème d'encadrement, on en déduit
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln n} = 1,$$
autrement dit $u_n \sim \ln n$.