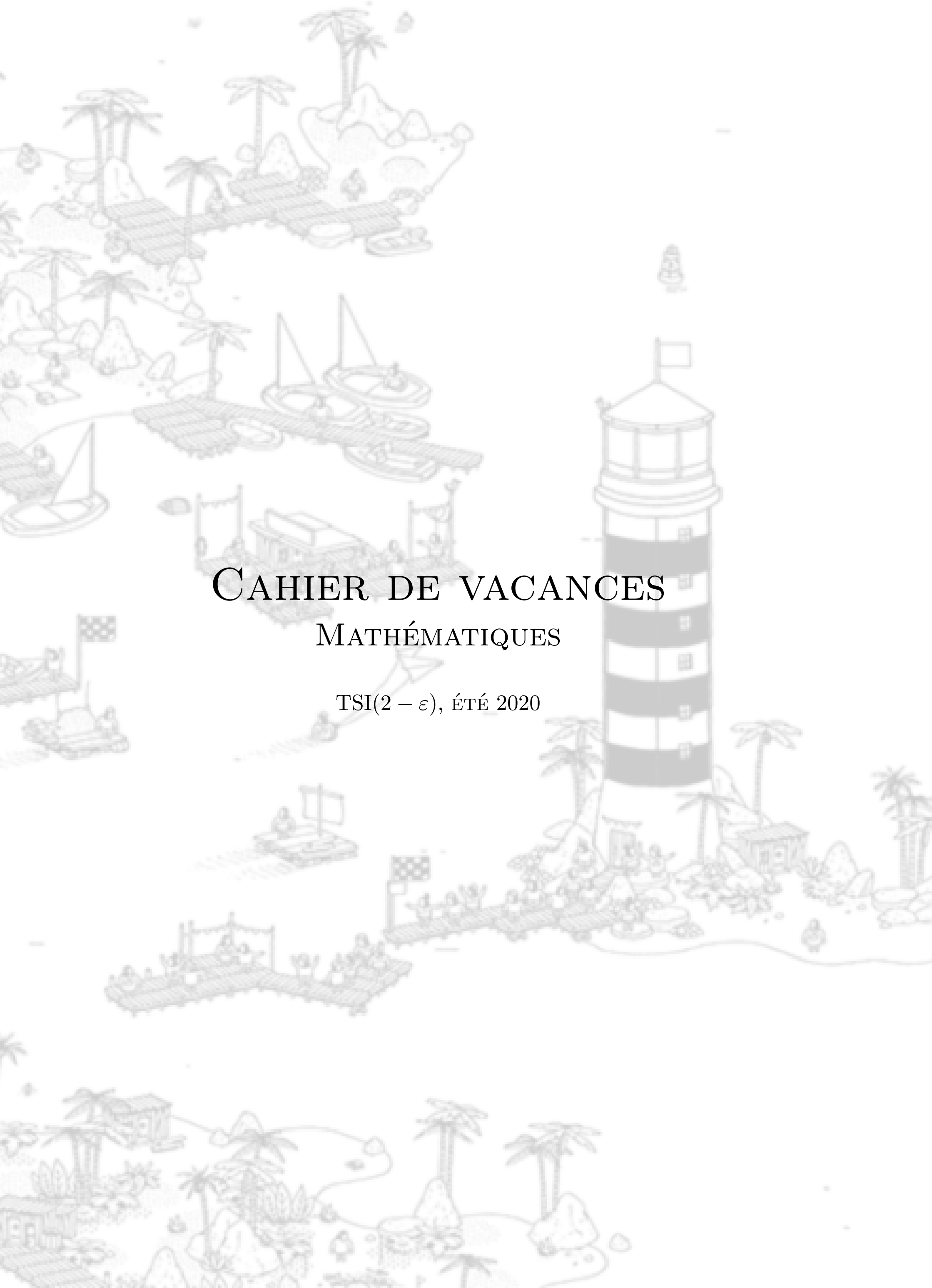


Cahier de vacances

Mathématiques

TSI($2-\varepsilon$), été 2020

Avant-propos

Le présent cahier a pour objectif de vous permettre de pratiquer un peu de maths pendant vos vacances. Il n'est pas obligatoire, mais les notions abordées dans les exercices (qui ont toutes été vues en classe cette année) et les formules présentes en quatrième de couverture seront supposées connues de tou·tes à la rentrée de septembre.

Des indications pour la résolution de chaque exercice sont présentes en page 7.

Bonnes vacances !

E. B.

Exercices

1. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}.$$

(1) Donner le domaine de définition et le domaine de dérivabilité de f.

(2) Vérifier que la dérivée de f est nulle. Qu'en déduit-on concernant la fonction f ?

(3) Calculer $f(1)$ et $f(-1)$. Est-ce compatible avec le résultat de la question (2) ? Si non, où est l'erreur ?

2. Dans un entretien donné au *Guardian* le 3 juillet [1], le professeur d'infection muqueuse et d'immunologie Robin Shattock déclare :

> « The success rate of vaccines at this stage of development is 10% and there are already probably 10 vaccines in clinical trials, so that means we will definitely have one. »

On suppose que 10 vaccins sont actuellement en cours de développement, que chacun des projets de vaccin aboutit avec probabilité 0,1, et que les réussites des projets de vaccin sont indépendantes les unes des autres.

(1) Quelle est la probabilité qu'au moins un des projets de vaccins aboutisse ?

Illustrations : Sylvain Tegroeg pour le jeu Hidden Folks.

1. `https://www.theguardian.com/society/2020/jul/03/im-cautiously-optimistic-imperials-robin-shattock-on-his-coronavirus-vaccine`

(2) À partir de combien de projets de vaccins simultanément en développement le professeur Shattock pourrait-il avoir 99% de certitude que l'un d'entre eux aboutisse ?

3. Linéariser l'expression $\cos^3 t$. En déduire la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^3 t \, \mathrm{d}t$.

4. Soient $b, r, n \in \mathbf{N}^\star$. Une urne contient b boules bleues et r boules rouges. On tire successivement n boules dans l'urne, avec remise.

(1) Quelle est la probabilité de ne tirer que des boules rouges ?

(2) Soit $k \in [\![0; n]\!]$. Quelle est la probabilité de tirer exactement k boules bleues ?

5. Résoudre sur $]-1; 1[$ l'équation différentielle

$$(1 - x^2)y'(x) - xy(x) = 1.$$

6. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{\pm 1\}$,

$$\frac{1}{t^2 - 1} = \frac{a}{t - 1} + \frac{b}{t + 1}.$$

En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_2^3 \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - 1}$.

7. Donner la forme algébrique du nombre complexe $z = (2 + 2i)^7$ (ne pas développer directement !).

8. Montrer que $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice d'un projecteur. Déterminer ses éléments caractéristiques.

☕. Résoudre le sudoku « miracle » de Mitchell Lee [2]. Les règles habituelles du sudoku s'appliquent, avec deux règles supplémentaires.

		1						
						2		

Règles supplémentaires

- deux cases orthogonalement adjacentes ne peuvent pas contenir deux chiffres consécutifs ;
- deux cases séparées par un déplacement de roi ou de cavalier (pièces d'échecs) ne peuvent pas contenir le même chiffre.

9. On dispose d'une pièce de monnaie truquée (deux côtés Pile), ainsi que d'une pièce ordinaire. On choisit sans regarder l'une de ces deux pièces et on la lance n fois ; on n'obtient que des Pile. À partir de quelle valeur de n peut-on être sûr·e à 99% qu'on a choisi la pièce truquée ? (d'après R. Mansuy)

10. Soit u une forme linéaire sur un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E. Que peut-on dire du rang de u ? En déduire que toute forme linéaire est soit nulle, soit surjective.

11. Dans le roman *Pyramides* écrit par Terry Pratchett, le jeune pharaon en exil Teppicymon XCVII (« Teppic ») rencontre deux philosophes occupés à tirer des flèches sur une tortue. L'un d'eux tente d'expliquer son raisonnement [3] :

> « C'très simple, attaqua Xénon. Té, suppose que ce noyau d'olive, il soye la flèche et... — il chercha au hasard autour de lui — et cette mouette assommée la tortue,

2. résolution en vidéo : `https://youtu.be/yKf9aUIxdb4`

3. C'est une parodie d'un véritable paradoxe énoncé au V^{e} siècle av. J.-C. par Zénon d'Élée. La texte cité est traduit par Patrick Couton.

> d'accord ? Bon, quand tu la tires, la flèche, elle va d'ici à la moue... à la tortue, d'acccord ?
>
> — Oui, je crois, mais...
>
> — Mais à ce moment-là, la moue... la tortue, elle est un peu plus loin, non ? D'accord ?
>
> — Oui, je crois », fut obligé de reconnaître Teppic. Xénon lui lança un regard de triomphe.
>
> « Donc, la flèche doit parcourir une distance supplémentaire, hé, forcément, jusqu'au point où se trouve la tortue. Pendant ce temps, la tortue, elle a vol... progressé, pas beaucoup, je te l'accorde, mais ça suffit. Pas vrai ? Donc, la flèche doit continuer encore un peu plus loin, mais en réalité, au moment où elle arrive là où la tortue se trouve maintenant, la tortue n'y est plus. Donc, si la tortue continue d'avancer, la flèche ne l'atteindra jamais. Elle s'en rapprochera de plus en plus mais elle ne l'atteindra jamais. C.Q.F.D.
>
> — Vous avez raison, alors ? demanda machinalement Teppic.
>
> — Nan, fit Ibid d'un ton glacial. Une dizaine de brochettes de tortues sont là pour prouver qu'il a tort. »

On propose de modéliser l'expérience de la façon suivante. Supposons que la tortue est située initialement à une distance $x_0 = 100$ m de l'archer et s'enfuit dans un mouvement uniforme à une vitesse de 1 m.s^{-1}. L'archer tire à l'instant initial une flèche qui vole vers la tortue à la vitesse constante de 100 m.s^{-1}.

(1) Calculer la durée t_0 mise par la flèche pour parcourir la distance x_0.

(2) Calculer la distance x_1 parcourue par la tortue au cours de l'intervalle de temps t_0.

(3) Calculer la durée t_1 mise par la flèche pour parcourir la distance x_1.

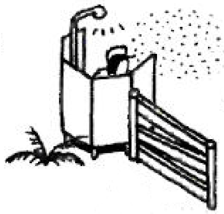
(4) Calculer la distance x_2 parcourue par la tortue au cours de l'intervalle de temps t_1.

...

(α) Déterminer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'expression de la distance x_n et de la durée t_n en fonction de n.

(β) Soit $N \in \mathbf{N}$. Exprimer en fonction de N les nombres $X_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} x_n$ et $T_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} t_n$.

(γ) Que dire de X_N et T_N lorsque N tend vers $+\infty$? Conclure.



12. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbf{K}_n[X]$.

(1) Rappeler la dimension de E.

(2) On considère une famille $\mathcal{B} = (P_0, \ldots, P_n)$ d'éléments de E échelonnés en degré – c'est-à-dire tels que, pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, $\deg P_k = k$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E.

On s'intéresse maintenant à l'endomorphisme

$$u\colon P \mapsto (X^2 - 1)P'' + (2X + 1)P'.$$

(3) Vérifier que u est bien défini.

(4) Déterminer la matrice de u dans la base canonique de E.

(5) Déterminer le noyau de u.

(6) Déterminer le rang de u (essayer de répondre à cette question de plusieurs manières différentes – on peut en trouver au moins quatre).

13. On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$,

$$u_n = \sum_{k=1}^{k} \frac{1}{k}.$$

(1) Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $\ln(1 + x) \leq x$.

(2) En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $\ln(n + 1) \leq u_n$.

(3) Montrer que, pour tout $k \geq 2$, $\dfrac{1}{k} \leq \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

(4) En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq 1 + \ln(n)$.

(5) Déduire des questions précédentes un équivalent de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^\star}$.

Indications

1. Dans le théorème « $f' = 0 \implies f$ constante », quelle propriété doit vérifier le domaine de définition de f ?

2. Calculer la probabilité de l'événement contraire.

3. Écrire $\cos t$ à l'aide de la formule d'Euler, puis l'élever au cube à l'aide du binôme de Newton.

4. Les tirages sont-ils indépendants les uns des autres ? Dénombrer toutes les façons différentes de tirer k boules.

5. Résoudre l'équation homogène, puis utiliser la méthode de variation de la constante.

6. Réduire au même dénominateur, puis identifier les coefficients.

7. Écrire $2 + 2i$ sous forme trigonométrique.

8. Vérifier que $M^2 = M$, puis calculer $\operatorname{Ker} M$ et $\operatorname{Ker}(M - I_3)$.

9. Utiliser la formule de Bayes.

10. $\operatorname{Im} u$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}$. Quelles sont ses dimensions possibles ?

11. Reconnaître des suites géométriques et utiliser la formule du cours pour la somme de leurs termes.

12. (2) Écrire une combinaison linéaire nulle des P_i. Que dire du coefficient dominant ?

(3) Vérifier que si $\deg P \leq n$, alors $\deg u(P) \leq n$.

(6) Théorème du rang, nombre de pivots, dimension de l'espace engendré par les lignes de la matrice, par ses colonnes, etc.

13. (1) Étudier les variations de la différence.

(2) Appliquer la question précédente à $x = \frac{1}{k}$, puis sommer pour tout $k \in [\![1; n]\!]$. Reconnaître une somme télescopique.

(3) Exprimer $\frac{1}{k}$ comme l'intégrale d'une fonction constante.

(4) Appliquer la question précédente à la définition de u_n. Attention à $k = 1$!

(5) Utiliser le théorème d'encadrement pour déterminer la limite du quotient $\frac{u_n}{\ln n}$.

Questions, remarques, demandes d'aide ou de correction, etc.

$\searrow \quad \downarrow \quad \swarrow$

e.besson@free.fr

Formulaire

Voir les réponses et se tester sur `sophieand.me`.

Formules trigonométriques. Connaître par cœur ou savoir retrouver rapidement ($t < 30$ s, sans erreur de signe ou autre) :

valeurs des fonctions cos, sin et tan en 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$.

$$\cos(-\theta);\quad \sin(-\theta);\quad \tan(-\theta);\quad \cos(\theta+2\pi);\quad \sin(\theta+2\pi);\quad \tan(\theta+\pi);$$
$$\cos(\pi \pm \theta);\quad (\sin \pi \pm \theta);\quad \cos(\tfrac{\pi}{2} \pm \theta);\quad \sin(\tfrac{\pi}{2} \pm \theta);$$

$$\cos(a \pm b);\quad \sin(a \pm b);\quad \tan(a \pm b);$$
$$\cos(2a) \text{ (3 formules)};\quad \sin(2a);\quad \tan(2a);$$
$$\cos^2\theta + \sin^2\theta;\quad \text{linéarisation de } \cos^2\theta \text{ et de } \sin^2\theta;$$

$$\cos a \cos b;\quad \sin a \sin b;\quad \sin a \cos b;\quad \cos p \pm \cos q;\quad \sin p \pm \sin q;$$
$$\text{écriture de } \cos\theta,\ \sin\theta,\ \tan\theta \text{ en fonction de } t = \tan\tfrac{\theta}{2}.$$

Dérivées. Connaître les domaines de définition, de dérivabilité et les dérivées des fonctions suivantes :

$$x \mapsto x^\alpha \text{ (distinguer } \alpha \in \mathbf{N},\ \alpha \in \mathbf{Z},\ \alpha \in \mathbf{R});\quad x \mapsto \sqrt{x};\quad x \mapsto e^x;$$
$$x \mapsto a^x\ (a > 0);\quad x \mapsto \ln x;\quad x \mapsto \cos x;\quad x \mapsto \sin x;$$
$$x \mapsto \tan x \text{ (2 formes)};\quad x \mapsto \arccos x;\quad x \mapsto \arcsin x;\quad x \mapsto \arctan x.$$

Connaître les formules de dérivation suivantes :

$$(u+v)';\quad (\lambda \cdot u)';\quad (u \times v)';\quad \left(\frac{1}{u}\right)';\quad \left(\frac{u}{v}\right)';\quad (v \circ u)';$$

$$(u^n)';\quad (\sqrt{u})';\quad (\exp u)';\quad (\ln u)';\quad (\cos u)';\quad (\sin u)';\quad (\tan u)';$$
$$(\arcsin u)';\quad (\arccos u)';\quad (\arctan u)'.$$

Primitives. Connaître par cœur ou savoir retrouver rapidement, sur chaque intervalle du domaine de définition, une primitive des fonctions suivantes :

$$x \mapsto x^\alpha\ (\alpha \neq -1);\quad x \mapsto \frac{1}{x};\quad x \mapsto e^{ax};\quad x \mapsto \cos(ax);\quad x \mapsto \sin(ax);$$
$$x \mapsto \ln(x);\quad x \mapsto \frac{1}{x^2+a^2};\quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Développements limités. Savoir donner à tout ordre le développement limité des expressions suivantes (x étant au voisinage de 0) :

$$e^x;\quad \cos x;\quad \sin x;\quad \ln(1+x);\quad \arctan x;\quad \frac{1}{1-x};\quad \frac{1}{1+x};$$
$$(1+x)^\alpha;\quad \tan x \text{ (à l'ordre 3 uniquement)}.$$