Samedi 11 septembre 2021 – Durée : 2h

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Questions de cours

Q1. Soient $a, b \in \mathbf{R}$. Développer $\sin(a+b)$. Donner trois formules différentes pour $\cos(2a)$.

Q2. Donner les développements limités de $\sin x$ et $\sqrt{1+x}$ à l'ordre 3 pour $x \to 0$.

Q3. Rappeler la définition d'une variable aléatoire de Bernoulli, son espérance et sa variance.

Q4. Donner les domaines de définition et de dérivabilité de la fonction $f\colon x \mapsto \arctan\left(\frac{\ln x}{x}\right)$, puis calculer sa dérivée.

Q5. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2\ln(1+x)}$.

Exercice I

Pour tout $x \geq 0$, on pose $f(x) = \ln(2+x)$ et $g(x) = f(x) - x$.

Q1. Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \geq 0$ tel que $g(\alpha) = 0$ et en donner un encadrement par deux entiers consécutifs (on rappelle que $\ln 2 \simeq 0{,}7$).

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \ln(2+u_n)$.

Q2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in [0;\alpha]$.

Q3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante.

Q4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un réel ℓ.

Q5. Montrer que $\ell = \alpha$. On pourra comparer ℓ avec la limite de la sous-suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbf{N}}$.

Q6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$ (on pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis).

Q7. En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|u_n-\alpha| \leq 2^{1-n}$.

Q8. Écrire en Python une fonction calculant une valeur approchée du nombre α à 10^{-3} près. On pourra importer la fonction logarithme népérien à l'aide de l'instruction `from math import log`.

Exercice II

Soit $a \in \mathbf{R}$. On considère l'application

$$u\colon \begin{array}{l} \mathbf{R}_3[X] \to \mathbf{R}_3[X] \\ P \mapsto P - \frac{1}{3}(X-a)P' \end{array}.$$

Q1. Rappeler la dimension de $\mathbf{R}_3[X]$ et en donner la base canonique (on la notera $\mathcal{B}$ dans la suite du problème).

Q2. Vérifier que u est un endomorphisme de $\mathbf{R}_3[X]$ (indication : il y a deux choses à vérifier).

Q3. Écrire la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

Q4. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = \big(1, X-a, (X-a)^2, (X-a)^3\big)$ est une base de $\mathbf{R}_3[X]$.

Q5. Pour tout $k \in \{0,1,2,3\}$, calculer $u\big((X-a)^k\big)$. En déduire la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$.

Q6. Déterminer le rang de u ainsi qu'une base de son noyau et de son image (on pourra utiliser la matrice construite à la question précédente).