Samedi 25 septembre 2021 – Durée : 4h

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Questions de cours

Q1. Soient $a, b \in \mathbf{R}$. Développer $\sin(a+b)$. Donner trois formules différentes pour $\cos(2a)$.

Q2. Donner les développements limités de $\cos x$ et $\ln(1+x)$ à l'ordre 4 pour $x \to 0$.

Q3. Rappeler la définition du coefficient binomial $\binom{n}{k}$, puis citer la formule du binôme de Newton.

Q4. Donner le domaine de définition, le domaine de dérivabilité, puis calculer la dérivée des fonctions $f\colon x \mapsto \sin(\cos(3x))$ et $g\colon x \mapsto \dfrac{\sqrt{5+4x}}{1+2\sqrt{1+x}}$.

Q5. Calculer $\lim\limits_{x\to 0,\ x>0} (1+x)^{1/x}$.

Exercice I

Q1. Déterminer des réels $a, b, c \in \mathbf{R}$ tels que, pour tout $x \in [0;1]$,

$$\frac{x}{x^3+1} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}.$$

Q2. Donner les primitives de $\dfrac{1}{x+1}$ et $\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$ sur $[0;1]$.

Q3. Donner une primitive sur $[0;1]$ de

$$\frac{1}{x^2-x+1}.$$

On pourra s'aider des changements de variables $u = x - \frac{1}{2}$ puis $v = \frac{2u}{\sqrt{3}}$.

Q4. En déduire une primitive de $\dfrac{x}{1+x^3}$ sur $[0;1]$.

Q5. Déterminer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\sin^3 x + \cos^3 x}\,\mathrm{d}x.$$

On pourra s'aider du changement de variables $u = \tan x$.

Exercice II

On considère la partie F de $\mathbf{R}^4$ définie par

$$F = \Big\{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + y = 0 \text{ et } x + z = 0\Big\}.$$

Q1. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.

Q2. Donner une base de F. Quelle est la dimension de F ?

Q3. Compléter la base trouvée en une base de $\mathbf{R}^4$.

Q4. On pose

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} ; \quad u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ?

Q5. On note G le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ engendré par la famille (u_1, u_2, u_3). Quelle est la dimension de G ?

Q6. Montrer que $F \cap G$ est de dimension 1.

Q7. En déduire que $F + G = \mathbf{R}^4$.

Q8. Peut-on écrire tout vecteur de $\mathbf{R}^4$ de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G ?

Exercice III

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n t \,\mathrm{d}t$.

Q1. Calculer u_0, u_1 et u_2.

Q2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \geq 0$.

Q3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.

Q4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(n+2)u_{n+2} = (n+1)u_n$ (on pourra procéder par intégration par parties).

Q5. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $v_n = (n+1)u_{n+1}u_n$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est constante et donner sa valeur.

Q6. En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(n+1)u_{n+1}^2 \leq 2\pi \leq (n+1)u_n^2$.

Q7. À l'aide de la question précédente, déterminer un encadrement de u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$.

Q8. En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2\pi}{n}}$.

(d'après CCINP 2019)

Exercice IV

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}^\star$. On note id l'application identité de E. On rappelle que, si f est un endomorphisme de E, alors pour tout $p \in \mathbf{N}^\star$, on note $f^p = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{p \text{ fois}}$ et $f^0 = \mathrm{id}$ par convention.

Exemple. Soit $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définie par $f(x,y) = \frac{1}{4}(x+3y, 3x+y)$.

Q1. Justifier soigneusement que f est un endomorphisme de $\mathbf{R}^2$.

Q2. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$.

Q3. En déduire que $f^2 = \frac{1}{2}(f + \mathrm{id})$.

Cas général. Dans toute la suite du problème, f désigne un endomorphisme quelconque de E vérifiant $f^2 = \frac{1}{2}(f + \mathrm{id})$.

Q4. Montrer que f est un isomorphisme et exprimer son inverse f^{-1} en fonction de f et de id.

Q5. Justifier que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(f + \frac{1}{2}\mathrm{id})$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

Q6. Soit $x \in E$. Montrer que $\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}f(x) \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ et que $\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}f(x) \in \mathrm{Ker}(f + \frac{1}{2}\mathrm{id})$.

Q7. En déduire que $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(f + \frac{1}{2}\mathrm{id})$.

Q8. Calculer $(f + \frac{1}{2}\mathrm{id}) \circ (f - \mathrm{id})$. En déduire que $\mathrm{Ker}(f + \frac{1}{2}\mathrm{id}) = \mathrm{Im}(f - \mathrm{id})$.

Q9. Exprimer f^3 et f^4 comme combinaisons linéaires de f et id.

Q10. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe $a_n, b_n \in \mathbf{R}$ tels que $f^n = a_n f + b_n \mathrm{id}$. Déterminer a_0, b_0, a_1 et b_1, et exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Q11. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n = \frac{2}{3}\Big(1 - (-\frac{1}{2})^n\Big)$ et $b_n = \frac{1}{3}\Big(1 - (-\frac{1}{2})^{n-1}\Big)$.

Q12. Déterminer les limites respectives de a_n et b_n lorsque n tend vers $+\infty$.

(d'après CCINP 2020)

⋆ ⋆

⋆