

QUESTIONS DE COURS

Q1. $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ et $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$.

Q2. Pour x tendant vers 0, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{24} + o(x^4)$ et $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$.

Q3. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$. Pour tous $a, b \in \mathbf{C}$ et $n \in \mathbf{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Q4. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbf{R}$ par composition. La fonction g est définie sur $[-1; +\infty[$ et dérivable sur $] -1; +\infty[$ par composition.

Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = -3 \sin(3x) \cdot \cos(\cos(3x))$ et, pour tout $x > 1$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\frac{4}{2\sqrt{5+4x}}(1+2\sqrt{1+x}) - \sqrt{5+4x} \frac{2}{2\sqrt{1+x}}}{(1+2\sqrt{1+x})^2} = \frac{2\sqrt{1+x} + 4(1+x) - (5+4x)}{\sqrt{(1+x)(5+4x)}(1+2\sqrt{1+x})^2} \\ &= \frac{-1+2\sqrt{1+x}}{\sqrt{(1+x)(5+4x)}(1+2\sqrt{1+x})^2} \end{aligned}$$

Q5. Pour x tendant vers 0, $x > 0$,

$$(1+x)^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x} \ln(1+x)\right) = \exp\left(\frac{1}{x}(x+o(x))\right) = \exp(1+o(1)) \xrightarrow{x \rightarrow 0} e.$$

EXERCICE I

Q1. Pour tout $x \in [0; 1]$,

$$\begin{aligned} \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1} &= \frac{a(x^2-x+1) + (bx+c)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} \\ &= \frac{(a+b)x^2 + (b+c-a)x + a+c}{x^3+1} \end{aligned}$$

Par identification des numérateurs, l'égalité demandée est vraie ssi

$$\begin{cases} a+b=0 \\ b+c-a=1 \\ a+c=0 \end{cases} \quad \text{autrement dit} \quad \begin{cases} a=-\frac{1}{3} \\ b=c=\frac{1}{3} \end{cases}$$

Q2. On reconnaît deux fonctions de la forme $\frac{u'}{u}$. Par ailleurs $x+1$ et x^2-x+1 sont strictement positifs pour tout $x \in [0; 1]$, les primitives sont donc respectivement $\ln(x+1) + c$ et $\ln(x^2-x+1) + c$.

Q3. On effectue les changements de variables proposés. En premier lieu, $u = x - \frac{1}{2}$ donc $du = dx$ et $x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 1 = u^2 + \frac{3}{4}$:

$$\int \frac{dx}{x^2-x+1} = \int \frac{du}{u^2 + \frac{3}{4}}.$$

Ensuite, en posant $v = \frac{2u}{\sqrt{3}}$, $dv = \frac{2}{\sqrt{3}} du$ et $u^2 = \frac{3}{4}v^2$, donc

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2-x+1} &= \int \frac{du}{u^2 + \frac{3}{4}} = \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} dv}{\frac{3}{4}(v^2+1)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan v + c = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + c. \end{aligned}$$

Q4. On utilise toutes les questions précédentes :

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3+1} &= -\frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{3} \int \frac{x+1}{x^2-x+1} dx \\ &= -\frac{1}{3} \ln(x+1) + \frac{1}{3} \int \frac{x-\frac{1}{2}}{x^2-x+1} + \frac{1}{3} \int \frac{\frac{3}{2} dx}{x^2-x+1} \\ &= -\frac{1}{3} \ln(x+1) + \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + c \end{aligned}$$

Q5. On effectue le changement de variables proposés : $u = \tan x$ donc $du = \frac{dx}{\cos^2 x} = (1 + \tan^2 x) dx$. Alors

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\frac{\sin x}{\cos^3 x}}{\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} + 1} dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\tan x \frac{dx}{\cos^2 x}}{\tan^3 x + 1} = \int_0^1 \frac{u du}{u^3 + 1}$$

D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{u du}{u^3+1} &= \left[-\frac{1}{3} \ln(u+1) + \frac{1}{6} \ln(u^2-u+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right) \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{3} \ln 2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx = -\frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \simeq 0,37.$$

EXERCICE II

Q1. L'inclusion $F \subset \mathbf{R}^4$ est évidente. Le vecteur nul $0 = (0, 0, 0, 0) \in \mathbf{R}^4$ vérifie les équations $x + y = 0$ et $x + z = 0$ donc on a bien $0 \in F$.

Enfin, soient $v_1 = (x_1, y_1, z_1, t_1)$ et $v_2 = (x_2, y_2, z_2, t_2) \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Alors $\lambda v_1 + \mu v_2 = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2, \lambda t_1 + \mu t_2)$. On a bien

$$\begin{aligned} \lambda x_1 + \mu x_2 + \lambda y_1 + \mu y_2 &= \lambda \underbrace{(x_1 + y_1)}_{=0 \text{ car } v_1 \in F} + \mu \underbrace{(x_2 + y_2)}_{=0 \text{ car } v_2 \in F} = 0 \\ \lambda x_1 + \mu x_2 + \lambda z_1 + \mu z_2 &= \lambda \underbrace{(x_1 + z_1)}_{=0 \text{ car } v_1 \in F} + \mu \underbrace{(x_2 + z_2)}_{=0 \text{ car } v_2 \in F} = 0 \end{aligned}$$

donc $\lambda v_1 + \mu v_2 \in F$. Il s'agit donc bien d'un sous-espace vectoriel.

On pouvait également remarquer que $F = \ker \varphi$, où $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^4, \mathbf{R}^2)$ est définie par $\varphi(x, y, z, t) = (x + y, x + z)$.

Q2. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + y = 0 \text{ et } x + z = 0\} = \{(x, -x, -x, t) \mid x, t \in \mathbf{R}\} = \text{Vect}((1, -1, -1, 0), (0, 0, 0, 1))$. La famille $((1, -1, -1, 0), (0, 0, 0, 1))$ est donc génératrice de F . De plus, elle est clairement libre, il s'agit donc d'une base de F qui est ainsi de dimension 2.

Q3. Il suffit de trouver deux vecteurs non colinéaires entre eux et n'appartenant pas à F . Par exemple, les vecteurs $(0, 1, 0, 0)$ et $(0, 0, 1, 0)$ conviennent. La famille $((1, -1, -1, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0))$ est alors une base de F .

Q4. Soient $\lambda, \mu, \nu \in \mathbf{R}$. On suppose que $\lambda u_1 + \mu u_2 + \nu u_3 = 0$. Alors

$$\begin{cases} \lambda + \mu - \nu = 0 \\ \lambda + 2\mu = 0 \\ \lambda + 3\mu - \nu = 0 \\ \lambda + 4\mu = 0 \end{cases} \quad \text{d'où on déduit que } \lambda = \mu = \nu = 0.$$

La famille est donc libre.

Q5. Par définition, (u_1, u_2, u_3) est une famille génératrice de G . On a montré à la question précédente qu'elle était libre, il s'agit donc d'une base de G . Ce sous-espace est donc de dimension 3.

Q6. Soit $v \in F \cap G$. D'une part, $v \in G$ donc il existe $\lambda, \mu, \nu \in \mathbf{R}$ tels que $v = \lambda u_1 + \mu u_2 + \nu u_3 = \begin{pmatrix} \lambda + \mu - \nu \\ \lambda + 2\mu \\ \lambda + 3\mu - \nu \\ \lambda + 4\mu \end{pmatrix}$.

Mais, d'autre part, $v \in F$ donc $(\lambda + \mu - \nu) + (\lambda + 2\mu) = 0$ et $(\lambda + \mu - \nu) + (\lambda + 3\mu - \nu) = 0$. En simplifiant ces deux équations et en les écrivant dans un

système, on obtient

$$\begin{cases} 2\lambda + 3\mu - \nu = 0 \\ 2\lambda + 4\mu - 2\nu = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -\mu \\ \mu = \nu \end{cases}$$

Ainsi, $v = \lambda(u_1 - u_2 - u_3) = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \in \text{Vect}(u_1 - u_2 - u_3)$ donc $F \cap G \subset \text{Vect}(u_1 - u_2 - u_3)$.

Réciproquement, si $v \in \text{Vect}(u_1 - u_2 - u_3)$, alors $v \in \text{Vect}(u_1, u_2, u_3) = G$. Par ailleurs, il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $v = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ donc on vérifie facilement que $v \in F$. Ainsi, $v \in F \cap G$ donc $\text{Vect}(u_1 - u_2 - u_3) \subset F \cap G$.

On a ainsi montré l'égalité entre sous-espaces vectoriels $F \cap G = \text{Vect}(u_1 - u_2 - u_3)$. Comme $u_1 - u_2 - u_3 = 0$, $\text{Vect}(u_1 - u_2 - u_3)$ est de dimension 1 et G est donc également de dimension 1.

Q7. D'après la formule de Grassmann, $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = 2 + 3 - 1 = 4$ d'après les questions précédentes. On a donc $F + G \subset \mathbf{R}^4$ et $\dim(F + G) = \dim(\mathbf{R}^4)$, on en déduit que $F + G = \mathbf{R}^4$.

Q8. D'après la question 6, $F \cap G \neq \{0\}$ donc la somme $F + G$ n'est pas directe. On peut donc écrire tout vecteur de $\mathbf{R}^4$ comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G , mais pas de manière unique.

EXERCICE III

$$\mathbf{Q1.} \quad u_0 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt = \pi; \quad u_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \, dt = [\sin t]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2;$$

$$u_2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2t)}{2} \, dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

Q2 et 3 Soit $n \in \mathbf{N}$. Pour tout $t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \cos t \leq 1$, donc $0 \leq \cos^n t \leq 1$, puis $0 \leq \cos^{n+1} t \leq \cos^n t$. Comme $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}$, on en déduit, par croissance de l'intégrale, que $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$. Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbf{N}$, on en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est décroissante et positive.

Q4. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. La fonction $t \mapsto \cos^{n+1} t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et la fonction $t \mapsto \cos t$ continue sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, donc par intégration par parties,

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{\cos t \cos^{n+1} t}_{=0 \text{ car } n+1 \geq 1} dt = \underbrace{[\sin t \cos^{n+1} t]_{-\pi/2}^{\pi/2}}_{=0} + (n+1) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{\sin^2 t}_{=1-\cos^2 t} \cos^n t dt \\ &= (n+1)u_n - (n+1)u_{n+2}, \end{aligned}$$

donc $(n+2)u_{n+2} = (n+1)u_n$.

Q5. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_{n+1} = (n+2)u_{n+2}u_{n+1}$, mais d'après la question précédente, $(n+2)u_{n+2} = (n+1)u_n$ donc $v_{n+1} = (n+1)u_n u_{n+1} = v_n$. La suite $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est donc constante, égale à $v_0 = 1u_1u_0 = 2\pi$.

Q6. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n = (n+1)u_{n+1}u_n = 2\pi$. Mais, la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ étant décroissante et les nombres $(n+1)$, u_n et u_{n+1} positifs, on a

$$(n+1)u_{n+1}u_{n+1} \leq (n+1)u_n u_{n+1} \leq (n+1)u_n u_n,$$

autrement dit $(n+1)u_{n+1}^2 \leq 2\pi \leq (n+1)u_n^2$.

Q7. Soit $n \geq 1$. On reprend l'inégalité de droite de la question précédente : $2\pi \leq (n+1)u_n^2$ donc $u_n \geq \sqrt{\frac{2\pi}{n+1}}$.

On reprend maintenant l'inégalité de gauche, mais appliquée à $n-1$ (ce qui est licite car $n-1$ est bien positif ou nul) : $nu_n^2 \leq 2\pi$, donc $u_n \leq \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$. On a donc

$$\sqrt{\frac{2\pi}{n+1}} \leq u_n \leq \sqrt{\frac{2\pi}{n}}.$$

Q8. On calcule la limite du rapport $u_n \sqrt{\frac{n}{2\pi}}$. D'après l'encadrement de la question précédente, pour tout $n \geq 1$,

$$\sqrt{\frac{n}{n+1}} \leq u_n \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \leq 1.$$

Le membre de gauche et le membre de droite convergent vers 1 lorsque n tend vers l'infini. Par théorème d'encadrement, on en déduit que $u_n \sqrt{\frac{n}{2\pi}}$ converge également vers 1. Autrement dit, $u_n \sim \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$.

EXERCICE IV

Q1. Par définition, $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$. Reste à montrer que f est linéaire. Soient (x_1, y_1) et $(x_2, y_2) \in \mathbf{R}^2$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Alors

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2) &= \frac{1}{4}(\lambda x_1 + \mu x_2 + 3\lambda y_1 + 3\mu y_2, 3\lambda x_1 + 3\mu x_2 + \lambda y_1 + \mu y_2) \\ &= \frac{\lambda}{4}(x_1 + 3y_1, 3x_1 + y_1) + \frac{\mu}{4}(x_2 + 3y_2, 3x_2 + y_2) \\ &= \lambda f(x_1, y_1) + \mu f(x_2, y_2). \end{aligned}$$

L'application f est donc un endomorphisme de $\mathbf{R}^2$.

Q2. On calcule $f(1, 0) = \frac{1}{4}(1, 3)$ et $f(0, 1) = \frac{1}{4}(3, 1)$ donc

$$\text{Mat}_{((1,0),(0,1))} f = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Q3. Notons M la matrice calculée à la question précédente. Alors

$$M^2 = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}I_2 = \frac{1}{2}(M + I_2).$$

On en déduit que $f^2 = \frac{1}{2}(f + \text{id})$.

Q4. $f^2 = \frac{1}{2}(f + \text{id})$, autrement dit $2f^2 - f = \text{id}$, c'est-à-dire $f \circ (2f - \text{id}) = \text{id}$. On en déduit que f est un automorphisme et que $f^{-1} = 2f - \text{id}$.

Q5. Ces deux ensembles sont des sous-espaces vectoriels de E car ce sont les noyaux d'applications linéaires définies sur E .

Q6. Soit $x \in E$. Alors

$$f\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}f(x)\right) = \frac{1}{3}f(x) + \frac{2}{3}f^2(x) = \frac{1}{3}f(x) + \frac{1}{3}f(x) + \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}f(x).$$

Autrement dit, $(f - \text{id})(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}f(x)) = 0$, donc $\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}f(x) \in \ker(f - \text{id})$.

De même, $f(\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}f(x)) = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}f(x) = -\frac{1}{2}(\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}f(x))$ donc $\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}f(x) \in \ker(f + \frac{1}{2}\text{id})$.

Q7. Soit $x \in \ker(f - \text{id}) \cap \ker(f + \frac{1}{2}\text{id})$. Alors $f(x) = x$ et $f(x) = -\frac{1}{2}x$, donc $x = -\frac{1}{2}x$ d'où $x = 0$. Ainsi, les deux sous-espaces sont en somme directe.

L'inclusion $\ker(f - \text{id}) + \ker(f + \frac{1}{2}\text{id})$ est évidente.

Soit $x \in E$. D'après la question précédente, on écrit :

$$x = \underbrace{\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}f(x)}_{\in \ker(f - \text{id})} + \underbrace{\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}f(x)}_{\in \ker(f + \frac{1}{2}\text{id})},$$

donc $x \in \ker(f - \text{id}) + \ker(f + \frac{1}{2}\text{id})$.

Ainsi, $E = \ker(f - \text{id}) \oplus \ker(f + \frac{1}{2}\text{id})$.

Q8. $(f + \frac{1}{2}\text{id}) \circ (f - \text{id}) = f^2 + \frac{1}{2}f - f - \frac{1}{2}\text{id} = \frac{1}{2}(f + \text{id}) - \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}\text{id} = 0$.

Soit $x \in \text{Im}(f - \text{id})$. Alors il existe $y \in E$ tel que $x = (f - \text{id})(y)$. Mais alors $(f + \frac{1}{2}\text{id})(x) = (f + \frac{1}{2}\text{id}) \circ (f - \text{id})(y) = 0$ d'après le calcul ci-dessus. Donc $x \in \ker(f + \frac{1}{2}\text{id})$.

Réciproquement, soit $x \in \ker(f + \frac{1}{2}\text{id})$. Alors $f(x) = -\frac{1}{2}x$, donc $f(x) - x = -\frac{3}{2}x$, et ainsi $x = f(-\frac{2}{3}x) + \frac{2}{3}x = (f - \text{id})(-\frac{2}{3}x)$. On en déduit que $x \in \text{Im}(f - \text{id})$.

Ainsi, $\ker(f + \frac{1}{2}\text{id}) = \text{Im}(f - \text{id})$.

Q9. On écrit $f^3 = f \circ f^2 = f \circ \frac{1}{2}(f + \text{id}) = \frac{1}{2}f^2 + \frac{1}{2}f = \frac{1}{4}f + \frac{1}{4}\text{id} + \frac{1}{2}f = \frac{3}{4}f + \frac{1}{4}\text{id}$.
De même, $f^4 = f^2 \circ f^2 = \frac{1}{4}(f + \text{id})(f + \text{id}) = \frac{1}{4}f^2 + \frac{1}{2}f + \frac{1}{4}\text{id} = \frac{5}{8}f + \frac{3}{8}\text{id}$.

Q10. L'initialisation est claire : $f^0 = \text{id}$ (donc $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$) et $f^1 = f$ (donc $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$).

Soit $n \in \mathbf{N}$, on suppose que les coefficients a_n et b_n existent. Alors

$$f^{n+1} = f \circ f^n = f \circ (a_n f + b_n \text{id}) = a_n f^2 + b_n f = \left(\frac{a_n}{2} + b_n\right) f + \frac{a_n}{2} \text{id}.$$

Ainsi les coefficients a_n et b_n existent pour tout $n \in \mathbf{N}$ et vérifient les relations de récurrence $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + b_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n}{2}$.

Q11. On le vérifie par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$. Pour $n = 0$, on retrouve bien $a_0 = 0$ et $b_0 = \frac{1}{3}(1 - (-2)) = 1$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. On suppose que $a_n = \frac{2}{3}(1 - (-\frac{1}{2})^n)$ et $b_n = \frac{1}{3}(1 - (-\frac{1}{2})^{n-1})$.

Alors, d'après la question précédente,

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + b_n = \frac{1}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) + \frac{1}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).$$

De même,

$$b_{n+1} = \frac{a_n}{2} = \frac{1}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) = \frac{1}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1-1}\right)$$

On en déduit que a_n et b_n s'écrivent bien de la manière indiquée.

Q12. $|\frac{1}{2}| < 1$ donc $(-\frac{1}{2})^n \rightarrow 0$. On en déduit que $a_n \rightarrow \frac{2}{3}$ et $b_n \rightarrow \frac{1}{3}$.