Samedi 16 octobre 2021 – Durée : 4h

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Question de cours

Soient $a, b \in \mathbf{R}$. Développer $\sin(a+b)$. Donner trois formules différentes pour $\cos(2a)$.

Exercice I

Pour tout entier naturel n, on définit les deux intégrales :

$$C_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x \,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad D_n = \int_0^{\pi/2} x^2 \cos^{2n} x \,\mathrm{d}x.$$

Q1. Calculer C_0, D_0 et C_1.

Q2. Calculer D_1.

Q3. Justifier que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $D_n > 0$ et $C_n > 0$.

Q4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $C_n = (2n-1)(C_{n-1} - C_n)$. (on pourra s'aider de l'écriture $\cos^{2n} x = \cos x \, \cos^{2n-1} x$)

Q5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, \cos^{2n-2} x \,\mathrm{d}x = \frac{C_n}{2n-1} = \frac{C_{n-1}}{2n}.$$

Q6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $C_n = (2n-1)nD_{n-1} - 2n^2 D_n$. (on pourra intégrer par parties le produit $1 \cdot \cos^{2n} x$)

Q7. En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$,

$$\frac{1}{n^2} = 2\left(\frac{D_{n-1}}{C_{n-1}} - \frac{D_n}{C_n}\right).$$

Q8. (a) Montrer que, pour tout $x \in [0; \pi/2], \sin x \geq \frac{2}{\pi} x$.

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $D_n \leq \dfrac{\pi^2}{4} \dfrac{C_n}{2n+2}$.

Q9. Déduire des questions précédente que la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est convergente et que sa somme est $\dfrac{\pi^2}{6}$.

(d'après BECEAS 2021)

Exercice II

On considère une urne contenant quatre jetons indiscernables au toucher et numérotés de 1 à 4. On tire au hasard et simultanément deux jetons. On note X le plus petit et Y le plus grand numéro obtenus.

Q1. Déterminer la loi conjointe de (X, Y). On pourra présenter le résultat sous la forme d'un tableau.

Q2. Déterminer les lois marginales de X et Y.

Q3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

On rappelle que, si A est un événement de probabilité non nulle et X une variable aléatoire, la *loi conditionnelle* de X sachant A est la donnée des probabilités $\mathbf{P}_A(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$.

Q4. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant que le plus petit numéro tiré est 3.

Q5. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant que le plus grand numéro tiré est pair.

Q6. Calculer la covariance du couple (X, Y).

Exercice III

On note E l'ensemble des matrices réelles symétriques de taille 2.

Q1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ de dimension 3.

Q2. Montrer que $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de E.

Pour tout $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in E$, on pose $f(M) = \begin{pmatrix} \frac{a+c}{2} - b & \frac{a-c}{2} \\ \frac{a-c}{2} & \frac{a+c}{2} + b \end{pmatrix}$.

Q3. Montrer que f est un endomorphisme de E.

Q4. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Q5. Calculer le déterminant de f. L'application f est-elle bijective ?

Q6. Montrer que f conserve la trace et le déterminant. Autrement dit, montrer que, pour tout $M \in E$, $\operatorname{tr}(f(M)) = \operatorname{tr}(M)$ et $\det(f(M)) = \det M$.

(d'après CCINP 2019)

Exercice IV

Une urne contient n jetons ($n \geq 2$) numérotés de 1 à n et indiscernables au toucher. On prélève une poignée aléatoire de jetons, on note N le nombre de jetons prélevés et S la somme de leurs valeurs (on convient qu'il est possible de tirer une poignée vide, et que dans ce cas $N = S = 0$).

IV.A. Poignées équiprobables. Dans cette partie (et dans cette partie uniquement), on suppose que toutes les poignées possibles sont équiprobables.

Q1. Donner la loi de probabilité de N.

Q2. Pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le jeton numéro i a été tiré, et 0 sinon. Quelle est la loi de probabilité de X_i ?

Q3. Exprimer S à partir des variables aléatoires X_i et en déduire $\mathbf{E}(S)$.

Q4. Montrer que les variables aléatoires X_i sont mutuellement indépendantes et en déduire $\mathbf{V}(S)$.

Q5. On suppose, dans cette question uniquement, que $n = 3$. Donner la loi de probabilité de S.

IV.B. Tailles de poignées équiprobables. Dans cette partie, on suppose que ce sont *les tailles* des poignées qui sont équiprobables (autrement dit, que N suit la loi uniforme sur $[\![0; n]\!]$).

Q6. Donner l'espérance et la variance de N.

Q7. Soient $i \in [\![1; n]\!]$ et $k \in [\![0; n]\!]$. Calculer la probabilité conditionnelle de tirer le jeton numéro i sachant que $N = k$.

Q8. Déduire de la question précédente la loi de probabilité de X_i.

Q9. Les variables aléatoires X_i sont-elles mutuellement indépendantes ?

Q10. On suppose, dans cette question uniquement, que $n = 3$. Donner la loi de probabilité de S.

$\star \quad \star$

$\star$