Exercice I

Q1. $C_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$. $D_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^3}{24}$.

$$C_1 = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Q2. $D_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} x^2\cos^2 x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x^2\,\mathrm{d}x + \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x^2\cos(2x)\,\mathrm{d}x$.

On calcule les deux termes séparément. Le premier donne $\frac{\pi^3}{48}$ par calcul direct (on reconnaît D_0). Pour le deuxième, on peut chercher une primitive sous la forme $(ax^2 + bx + c)\cos(2x)$ ou procéder par double intégration par parties de la manière suivante (les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \cos(2x)$ étant respectivement de classe $\mathcal{C}^2$ et continue) :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \underbrace{x^2}\,\overbrace{\cos(2x)}\,\mathrm{d}x &= \underbrace{\left[x^2\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\pi/2}}_{=0} - \int_0^{\pi/2} \underbrace{\cancel{2}x}\,\overbrace{\frac{\sin(2x)}{\cancel{2}}}\,\mathrm{d}x \\
&= -\left[-x\frac{\cos(2x)}{2}\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} -\frac{\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\pi}{4} - \cancel{\left[\frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\pi/2}} = -\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $D_1 = \dfrac{\pi^3}{48} - \dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\pi(\pi^2-6)}{48}$.

Q3. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, les fonctions $x \mapsto \cos^{2n} x$ et $x \mapsto x^2\cos^{2n} x$ sont continues et positives sur l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}]$ qui est de longueur non nulle. Si l'intégrale C_n (resp. D_n) était nulle, cela impliquerait donc que $\cos^{2n} x = 0$ (resp. $x^2\cos^{2n} x = 0$) pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, ce qui n'est pas le cas (par exemple en $x = \frac{\pi}{4}$). Ainsi, toutes les intégrales C_n et D_n sont strictement positives.

Q4. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On opère la décomposition suggérée dans l'énoncé et on intègre par parties (car $x \mapsto \cos x$ est continue et $x \mapsto \cos^{2n-1} x$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$)

$$\begin{aligned}
C_n &= \int_0^{\pi/2} \overbrace{\cos x}\,\underbrace{\cos^{2n-1} x}\,\mathrm{d}x \\
&= \cancel{\left[\sin x \cos^{2n-1} x\right]_0^{\pi/2}} - \int_0^{\pi/2} \sin x \cdot (2n-1)(-\sin x)\cos^{2n-2} x\,\mathrm{d}x \\
&= (2n-1)\int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin^2 x}_{=1-\cos^2 x}\,\cos^{2n-2} x\,\mathrm{d}x = (2n-1)\int_0^{\pi/2} (\cos^{2n-2} x - \cos^{2n} x)\,\mathrm{d}x \\
&= (2n-1)(C_{n-1} - C_n).
\end{aligned}$$

Q5. On reprend le calcul de la question précédente : pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$,

$$C_n = (2n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,\cos^{2n-2} x\,\mathrm{d}x$$

donc

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\cos^{2n-2} x\,\mathrm{d}x = \frac{C_n}{2n-1}.$$

Pour montrer la deuxième égalité, on peut par exemple déduire de la question précédente que $(2n-1)C_{n-1} = C_n + (2n-1)C_n = 2nC_n$, d'où $\frac{C_{n-1}}{2n} = \frac{C_n}{2n-1}$.

Q6. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, toutes les fonctions concernées étant de classe $\mathcal{C}^\infty$,

$$
\begin{aligned}
C_n &= \int_0^{\pi/2} \overbrace{1}\ \underbrace{\cos^{2n} x}\, \mathrm{d}x \\
&= \cancel{\Big[x \cos^{2n} x\Big]_0^{\pi/2}} - \int_0^{\pi/2} x \cdot 2n(-\sin x)\cos^{2n-1} x \,\mathrm{d}x \\
&= 2n \int_0^{\pi/2} \overbrace{x}\ \underbrace{\sin x\, \cos^{2n-1} x}\, \mathrm{d}x \\
&= 2n \cancel{\left[\frac{x^2}{2} \sin x \cos^{2n-1} x\right]_0^{\pi/2}} \\
&\qquad - 2n \int_0^{\pi/2} \frac{x^2}{2} \left(\cos x \cos^{2n-1} x - (2n-1) \underbrace{\sin^2 x}_{=1-\cos^2 x} \cos^{2n-2} x\right) \mathrm{d}x \\
&= -n \int_0^{\pi/2} x^2 \left(\cos^{2n} x - (2n-1)(\cos^{2n-2} x - \cos^{2n} x)\right) \mathrm{d}x \\
&= -n \int_0^{\pi/2} \left(2nx^2 \cos^{2n} x - (2n-1)x^2 \cos^{2n-2n} x\right) \mathrm{d}x \\
&= -2n^2 D_n + n(2n-1)D_{n-1}.
\end{aligned}
$$

Q7. On divise l'égalité de la question précédente par $n^2 C_n$ (non nul d'après **Q3**) : $\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{(2n-1)D_{n-1}}{nC_n} - \dfrac{2D_n}{C_n}$. Comme, d'après **Q5**, $\dfrac{2n-1}{C_n} = \dfrac{2n}{C_{n-1}}$, on en déduit l'égalité demandée.

Q8. (a) On étudie la fonction ϕ définie sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ par $\phi(x) = \sin x - \frac{2}{\pi} x$. C'est une fonction dérivable et, pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $\phi'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}$, qui est positive pour $x \leq \alpha = \arccos \frac{2}{\pi}$ et négative pour $x \geq \alpha$.

Enfin, $\phi(0) = \phi(\frac{\pi}{2}) = 0$. On en déduit le tableau de variations :

x	0		α		$\pi/2$
$\phi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\phi(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

On a donc $\phi(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, ce qui est bien l'inégalité demandée.

(b) Soit $n \in \mathbf{N}$. D'après la question précédente, pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $x \leq \frac{\pi}{2} \sin x$ donc $x^2 \cos^{2n} x \leq \frac{\pi^2}{4} \sin^2 x \cos^{2n} x$ Par croissance de l'intégrale (on a bien $0 \leq \frac{\pi}{2}$), on a donc

$$
D_n = \int_0^{\pi/2} x^2 \cos^{2n} x \,\mathrm{d}x \leq \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, \cos^{2n} x \,\mathrm{d}x \leq \frac{\pi^2}{4} \frac{C_n}{2(n+1)}
$$

en appliquant l'égalité de **Q5** au rang $n + 1 (\in \mathbf{N}^\star)$.

Q9. On écrit les sommes partielles de la série : pour tout $N \in \mathbf{N}^\star$,

$$
\begin{aligned}
S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} &= 2 \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{D_{n-1}}{C_{n-1}} - \frac{D_n}{C_n}\right) \quad \text{d'après } \mathbf{Q7} \\
&= 2 \left(\frac{D_0}{C_0} - \cancel{\frac{D_1}{C_1}} + \cancel{\frac{D_1}{C_1}} - \cancel{\frac{D_2}{C_2}} + \cdots + \cancel{\frac{D_{N-1}}{C_{N-1}}} - \frac{D_N}{C_N}\right) \quad \text{(somme télescopique)} \\
&= 2\frac{D_0}{C_0} - 2\frac{D_N}{C_N}.
\end{aligned}
$$

D'après la question précédente et par positivité de l'intégrale,

$$0 \leq \frac{D_N}{C_N} \leq \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{2N+2} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc

$$S_N \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 2\frac{D_0}{C_0} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ainsi, $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice II

Q1. $(X,Y)(\Omega) = \{(1;2);(1;3);(1;4);(2;3);(2;4);(3;4)\}$ et, pour tous $(x,y) \in (X,Y)(\Omega)$, $\mathbf{P}(X = x, Y = y) = \frac{1}{6}$. Autrement dit :

$X \backslash Y$	2	3	4
1	1/6	1/6	1/6
2	0	1/6	1/6
3	0	0	1/6

Q2. On déduit du tableau, en sommant selon les lignes (ou les colonnes), les lois marginales :
- $X(\Omega) = \{1;2;3\}$, $\mathbf{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$, $\mathbf{P}(X = 2) = \frac{1}{3}$ et $\mathbf{P}(X = 3) = \frac{1}{6}$;
- $Y(\Omega) = \{2;3;4\}$, $\mathbf{P}(Y = 2) = \frac{1}{6}$, $\mathbf{P}(Y = 3) = \frac{1}{3}$ et $\mathbf{P}(Y = 4) = \frac{1}{2}$.

Q3. On a $\mathbf{P}(X = 2, Y = 2) = 0$ alors que $\mathbf{P}(X = 2) \times \mathbf{P}(Y = 2) = \frac{1}{18} \neq 0$; on en déduit que X et Y ne sont pas indépendantes.

Q4. Si le plus petit numéro tiré est 3, le plus grand numéro est nécessairement 4. Autrement dit, la loi conditionnelle de Y sachant que le plus petit numéro tiré est 3 est la loi certaine de valeur 4 : $\mathbf{P}_{X=3}(Y = 2) = \mathbf{P}_{X=3}(Y = 3) = 0$ et $\mathbf{P}_{X=3}(Y = 4) = 1$.

Q5. La probabilité que le plus grand numéro tiré soit pair est $\mathbf{P}(Y \in \{2;4\}) = \mathbf{P}(Y = 2) + \mathbf{P}(Y = 4) = \frac{2}{3}$ (les événements $Y = 2$ et $Y = 4$ étant évidemment incompatibles). Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{Y\in\{2;4\}}(X = 1) &= \frac{\mathbf{P}(X = 1, Y \in \{2;4\})}{\mathbf{P}(Y \in \{2;4\})} = \frac{\mathbf{P}(X = 1, Y = 2) + \mathbf{P}(X = 1, Y = 4)}{\mathbf{P}(Y \in \{2;4\})}\\ &= \frac{2/6}{2/3} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

On trouve de même $\mathbf{P}_{Y\in\{2;4\}}(X = 2) = \frac{1/6}{2/3} = \frac{1}{4}$ et $\mathbf{P}_{Y\in\{2;4\}}(X = 3) = \frac{1/6}{2/3} = \frac{1}{4}$.

Q6. On calcule la loi de XY : $XY(\Omega) = \{2;3;4;6;8;12\}$ et $\mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{6}$ pour tout $k \in XY(\Omega)$. En effet, chaque valeur du produit XY peut être obtenue par une et une seule combinaison des tirages (X,Y). On en déduit

$$\mathbf{E}(XY) = \frac{2+3+4+6+8+12}{6} = \frac{35}{6}.$$

Par ailleurs,

$$\mathbf{E}(X) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{3} \quad \text{et}$$
$$\mathbf{E}(Y) = 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{10}{3}$$

On en déduit, d'après la formule de König-Huygens :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) = \frac{35}{6} - \frac{5}{3} \cdot \frac{10}{3} = \frac{5}{18}.$$

Exercice III

Q1. On rappelle qu'une matrice A est symétrique si et seulement si $A^T = A$. Ainsi, en définissant l'application $\phi\colon \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbf{R}),\ A \mapsto A^T - A$ (linéaire car la transposition est linéaire) on peut écrire $E = \operatorname{Ker}\phi$, ce qui prouve que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

Remarquons que si $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, alors $A^T = \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)$ donc $\phi(A) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & c-b \\ b-c & 0 \end{smallmatrix}\right)$. On en déduit que $\operatorname{Im}\phi = \operatorname{Vect}\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right)$, engendré par un seul vecteur donc de dimension 1. D'après le théorème du rang, $E = \operatorname{Ker}\phi$ est donc de dimension $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbf{R})) - 1 = 4 - 1 = 3$.

Q2. Commençons par remarquer que chaque matrice de $\mathcal{B}$ est bien symétrique ; on a donc effectivement affaire à une famille de vecteurs de E.

Soient $\lambda, \mu, \nu \in \mathbf{R}$. On suppose que $\lambda\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + \mu\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) + \nu\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = 0$. Alors $\left(\begin{smallmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & \nu \end{smallmatrix}\right) = 0$ donc $\lambda = \mu = \nu = 0$. On en déduit que la famille $\mathcal{B}$ est libre. Mais comme elle est de cardinal 3, dans E qui est de dimension 3, on en déduit que c'est une base de E.

Q3. On montre que f est linéaire : soient $M_1 = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{smallmatrix}\right)$ et $M_2 = \left(\begin{smallmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{smallmatrix}\right) \in E$, soient $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
f(\lambda M_1 + \mu M_2) &= f\left(\begin{pmatrix} \lambda a_1 + \mu a_2 & \lambda b_1 + \mu b_2 \\ \lambda b_1 + \mu b_2 & \lambda c_1 + \mu c_2 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\lambda a_1 + \mu a_2 + \lambda c_1 + \mu c_2}{2} - \lambda b_1 - \mu b_2 & \frac{\lambda a_1 + \mu a_2 - \lambda c_1 - \mu c_2}{2} \\ \frac{\lambda a_1 + \mu a_2 - \lambda c_1 - \mu c_2}{2} & \frac{\lambda a_1 + \mu a_2 + \lambda c_1 + \mu c_2}{2} + \lambda b_1 + \mu b_2 \end{pmatrix} \\
&= \lambda \begin{pmatrix} \frac{a_1 + c_1}{2} - b_1 & \frac{a_1 - c_1}{2} \\ \frac{a_1 - c_1}{2} & \frac{a_1 + c_1}{2} + b_1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \frac{a_2 + c_2}{2} - b_2 & \frac{a_2 - c_2}{2} \\ \frac{a_2 - c_2}{2} & \frac{a_2 + c_2}{2} + b_2 \end{pmatrix} \\
&= \lambda f(M_1) + \mu f(M_2).
\end{aligned}$$

L'application f est donc linéaire. De plus, pour tout $M \in E$, il est clair que $f(M)$ est une matrice symétrique (autrement dit que $f(M) \in E$). L'application f est donc bien un endomorphisme de E.

Q4. On calcule l'image des trois vecteurs de la base $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}
f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Q5. On met en facteur le $\frac{1}{2}$ des colonnes 1 et 3, puis on fait une combinaison sur les colonnes avant de développer suivant la deuxième ligne :

$$\det f = \begin{vmatrix} 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 + C_1}{=} \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

En particulier, $\det f \neq 0$ donc f est bijective.

Q6. Soit $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right) \in E$. Alors $\operatorname{tr}(M) = a + c$ et $\det(M) = ac - b^2$.

Par ailleurs, $f(M) = \begin{pmatrix} \frac{a+c}{2} - b & \frac{a-c}{2} \\ \frac{a-c}{2} & \frac{a+c}{2} + b \end{pmatrix}$ donc $\operatorname{tr}(f(M)) = \frac{a+c}{2} + b + \frac{a+c}{2} - b = a + c$.
Enfin,

$$\begin{aligned}\det(f(M)) &= \left(\frac{a+c}{2} - b\right)\left(\frac{a+c}{2} + b\right) - \frac{(a-c)^2}{4} = \frac{(a+c)^2}{4} - b^2 - \frac{(a-c)^2}{4} \\ &= \frac{a^2 + c^2 + 2ac - 4b^2 - a^2 - c^2 + 2ac}{4} = ac - b^2\end{aligned}$$

On a donc bien $\operatorname{tr}(f(M)) = \operatorname{tr}(M)$ et $\det(f(M)) = \det M$. L'application f conserve donc la trace et le déterminant.

Exercice IV

IV.A. Poignées équiprobables.

Q1. On peut tirer des poignées de toute taille entière entre 0 et n, donc $N(\Omega) = [\![0; n]\!]$. Pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, la probabilité de tirer une poignée de taille k est égal au nombre de poignées de taille k divisé par le nombre total de poignées possibles car toutes les poignées sont équiprobables. Il y a $\binom{n}{k}$ poignées de taille k possibles sur un total de 2^n, on a donc $\mathbf{P}(X = k) = 2^{-n}\binom{n}{k}$.

Q2. On a évidemment $X_i(\Omega) = \{0; 1\}$. Encore une fois, toutes les poignées étant équiprobables, la probabilité de tirer le jeton numéro i est égale au nombre de poignées contenant le jeton numéro i, divisisé par le nombre total de poignées possibles. Il y a 2^{n-1} poignées différentes contenant le jeton numéro i, donc $\mathbf{P}(X_i = 1) = \frac{1}{2}$. Autrement dit, $X_i \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$.

Q3. Pour calculer S, on additionne la valeur des jetons présents dans la poignée. Autrement dit, on additionne tous les i tels que $X_i = 1$. On peut donc écrire

$$S = X_1 = 2X_2 + \cdots + nX_n = \sum_{i=1}^{n} iX_i.$$

Par linéarité de l'espérance, on a donc

$$\mathbf{E}(S) = \sum_{i=1}^{n} i \cdot \mathbf{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2} = \frac{n(n+1)}{4}.$$

Q4. Il s'agit de vérifier que pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \{0, 1\}^n$, $\mathbf{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \mathbf{P}(X_1 = x_1) \times \cdots \times \mathbf{P}(X_n = x_n)$.

Soit donc $(x_1, \ldots, x_n) \in \{0, 1\}^n$. L'événement $(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$ définit de manière exacte le tirage d'une poignée : les i tels que $x_i = 1$ sont tirés et les autres non. Par exemple, $(1, 0, 0, \ldots, 0)$ revient à tirer exclusivement le jeton numéro 1. Chaque poignée étant tirée avec probabilité 2^{-n}, on en déduit que $\mathbf{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = 2^{-n}$.

Mais par ailleurs, comme les X_i suivent une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, on a $\mathbf{P}(X_i = x_i) = \frac{1}{2}$ pour tout $i \in [\![1; n]\!]$. On a donc bien $\mathbf{P}(X_1 = x_1) \times \cdots \times \mathbf{P}(X_n = x_n) = \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{2} = 2^{-n} = \mathbf{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$.

Ceci étant vrai pour tout jeu de valeurs $(x_1, \ldots, x_n) \in \{0; 1\}^n$, on en déduit que les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont mutellement indépendantes. D'après l'égalité de Bienaymé, on peut donc écrire

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(S) &= \mathbf{V}(X_1) + \mathbf{V}(2X_2) + \cdots + \mathbf{V}(nX_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(iX_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} i^2 \mathbf{V}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{4} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24}.\end{aligned}$$

Q5. Les jetons étant numérotés de 1 à 3, il existe 8 poignées possibles, chacune de probabilité $\frac{1}{8}$:

- une poignée vide ($S = 0$) ;
- trois poignées à un jeton ($S = 1$, 2 ou 3 respectivement) ;
- trois poignées à deux jetons ($S = 1 + 2 = 3$, $1 + 3 = 4$, $2 + 3 = 5$ respectivement) ;
- une poignée à trois jetons ($S = 1 + 2 + 3 = 6$).

On en déduit que $S(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, avec $\mathbf{P}(S = k) = \frac{1}{8}$ pour tout $k \neq 3$ et $\mathbf{P}(S = 3) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ (seul résultat atteignable avec deux poignées différentes).

IV.B. Tailles de poignées équiprobables.

Q6. N suit la loi uniforme sur $[\![0; n]\!]$ (qui contient $n + 1$ éléments), on a donc

$$\mathbf{E}(N) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \mathbf{P}(N = k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n}{2};$$

$$\mathbf{V}(N) = \mathbf{E}(N^2) - \mathbf{E}(N)^2 = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n+1} - \frac{n^2}{4} = \frac{n(2n+1)}{6} - \frac{n^2}{4} = \frac{n(n+2)}{12}.$$

Q7. On suppose que $N = k$, autrement dit que l'on a tiré k jetons. La probabilité qu'on ait tiré le jeton numéro i est donc $\frac{k}{n}$.

Q8. On a toujours $X_i(\Omega) = \{0; 1\}$ par définition. D'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbf{P}(X_i = 1) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\mathbf{P}_{N=k}(X_i = 1)}_{=\frac{k}{n}} \cdot \underbrace{\mathbf{P}(N = k)}_{=\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n} k = \frac{1}{2}.$$

Q9. Considérons la situation où l'on pioche la poignée constituée de tous les jetons. C'est l'unique poignée de taille n, elle est donc de probabilité $\frac{1}{n+1}$, autrement dit $\mathbf{P}(X_1 = 1, \ldots, X_n = 1) = \frac{1}{n+1}$. Mais, par ailleurs, $\mathbf{P}(X_1 = 1) \cdots \mathbf{P}(X_n = n) = 2^{-n}$, ce qui n'est pas égal à $\frac{1}{n+1}$ si $n \geq 2$. Les variables $X_1, \ldots, X_n$ ne sont donc pas mutuellement indépendantes.

Q10. Le détail des poignées est identique à celui de **Q5**. En revanche, les probabilités sont différentes, puisqu'on tire d'abord la taille de la poignée de manière équiprobable, puis l'une des poignées de la taille déterminée. Ainsi :

- la poignée vide est tirée avec probabilité $\frac{1}{4}$;
- chaque poignée à un jeton est tirée avec probabilité $\frac{1}{12}$;
- chaque poignée à deux jetons est tirée avec probabilité $\frac{1}{12}$;
- la poignée à trois jetons est tirée avec probabilité $\frac{1}{4}$.

On en déduit $S(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $\mathbf{P}(S = 0) = \mathbf{P}(S = 6) = \frac{1}{4}$, $\mathbf{P}(S = 1) = \mathbf{P}(S = 2) = \mathbf{P}(S = 4) = \mathbf{P}(S = 5) = \frac{1}{12}$ et $\mathbf{P}(S = 3) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.