SESSION 2021 **TSI1M**

LYCÉE EIFFEL DIJON

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TSI

MATHÉMATIQUES

Mardi 6 décembre : 8 h – 12 h

N. B. : Le ou la candidat·e attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un·e candidat·e est amené·e à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il ou elle le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il ou elle aura été amené·e à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Le sujet est composé de trois problèmes indépendants.

Le sujet est composé de 6 pages et d'un document réponse à rendre avec votre copie.

Sujet : page 1 à page 6
Document réponse : DR1

Problème I. Étude d'une chaîne de Markov

On considère un groupe de deux ampoules que l'on observe aux instants 0, 1, 2, 3... Ces deux ampoules sont supposées indépendantes l'une de l'autre.

À l'instant initial, on suppose que les deux ampoules sont allumées. Ces ampoules restent allumées jusqu'au moment où elles grillent. Elles peuvent donc être soit dans l'état allumé, soit dans l'état grillé. La possibilité qu'une ampoule soit éteinte n'est pas considérée ici.

À chaque instant, chaque ampoule déjà grillée reste grillée et chaque ampoule allumée a la probabilité $\frac{1}{2}$ de rester allumée et $\frac{1}{2}$ de griller.

On note, pour tout n entier naturel, X_n la variable aléatoire égale au nombre d'ampoules allumées à l'instant n. On remarquera que X_n peut prendre les valeurs 0, 1 et 2 (c'est-à-dire que $X_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$).

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on introduit le vecteur colonne $U_n \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ défini par

$$U_n = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_n = 0) \\ \mathbf{P}(X_n = 1) \\ \mathbf{P}(X_n = 2) \end{pmatrix}.$$

Mise en place du problème.

I.1. Déterminer la loi de X_0 et vérifier que $\mathbf{E}(X_0) = 2$. Déterminer la variance de X_0.

I.2. Justifier que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\mathbf{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}.$$

I.3. Déterminer, pour tout entier naturel n et sans justification, les probabilités conditionnelles :

$$\mathbf{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 0); \quad \mathbf{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2); \quad \mathbf{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1); \quad \mathbf{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0);$$

$$\mathbf{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 2); \quad \mathbf{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1); \quad \mathbf{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0).$$

I.4. Soit $n \geq 0$. À l'aide de la formule des probabilités totales, exprimer $\mathbf{P}(X_{n+1} = 1)$ en fonction de $\mathbf{P}(X_n = 0)$, $\mathbf{P}(X_n = 1)$ et $\mathbf{P}(X_n = 2)$.

Montrer alors que $U_{n+1} = AU_n$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$.

Espérance et variance des X_n. On se propose de déterminer l'espérance et la variance de tous les X_n sans chercher leur loi. On introduit les matrices de $\mathcal{M}_{1,3}(\mathbf{R})$ suivantes :

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

I.5. Calcul de l'espérance

a) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, vérifier que $\mathbf{E}(X_n) = L_1 U_n$.

b) Calculer $L_1 A$ et exprimer le résultat uniquement en fonction de L_1. En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{E}(X_{n+1}) = \frac{1}{2}\mathbf{E}(X_n)$.

c) Exprimer alors $\mathbf{E}(X_n)$ en fonction de n.

I.6. Calcul du moment d'ordre 2

a) À l'aide de la formule de transfert, exprimer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{E}(X_n^2)$ en fonction de L_2 et U_n.

b) Calculer $L_2 A$ et montrer qu'il existe deux réels α et β, que l'on déterminera, tels que $L_2 A = \alpha L_1 + \beta L_2$.

c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{E}(X_{n+1}^2) = \frac{1}{4}\mathbf{E}(X_n^2) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

d) On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par $u_n = \frac{1}{2^{n-1}}$. Vérifier que cette suite vérifie la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N} \; u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

e) Soit $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par $v_n = \mathbf{E}(X_n^2) - u_n$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est géométrique et déterminer sa raison.

f) En déduire, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'expression de $\mathbf{E}(X_n^2)$ en fonction de n.

I.7. Déduire des deux questions précédentes l'expression, pour tout $n \in \mathbf{N}$, de $\mathbf{V}(X_n)$ en fonction de n.

(d'après CCINP 2016)

Problème II. Matrices compagnons

Si $(a_1, \dots, a_p)$ est un p-uplet de nombres réels, on note $C(a_1, \dots, a_p)$ la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$ suivante :

$$C(a_1, \dots, a_p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & a_2 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_p \end{pmatrix}$$

II.1. Dans cette question, on suppose $p = 3$ et $A = C(-2, 1, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calculer le polynôme caractéristique de A.

b) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_\ni(\mathbf{R})$; déterminer une matrice diagonale $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ avec $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ et une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbf{R})$ telles que

$$A = PDP^{-1}$$

II.2. Dans cette question, on suppose $p = 3$ et $B = C(1, -3, 3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer le polynôme caractéristique de B et une base de chacun des sous-espaces propres de B.

b) Montrer que B n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ mais qu'elle est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

On considère le vecteur colonne $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$.

c) Déterminer un vecteur colonne $v_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ tel que $B \cdot v_2 = v_1 + v_2$.

d) Déterminer un vecteur colonne $v_3 = \begin{pmatrix} z \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ tel que $B \cdot v_3 = v_2 + v_3$.

e) En déduire une matrice R inversible de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telle que $B = RTR^{-1}$, où

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

II.3. On revient au cas où p n'est pas nécessairement égal à 3. On pose $C = C(a_1, \ldots, a_p)$.

a) Montrer, par récurrence sur p, que le polynôme caractéristique de C est

$$\chi_C(X) = X^p - a_p X^{p-1} - \cdots - a_2 X - a_1.$$

b) Montrer que si $\lambda \in \mathbf{R}$, alors le rang de $C - \lambda I_p$ est supérieur ou égal à $p - 1$. En déduire que les sous-espaces propres de C sont de dimension 1.

c) Montrer que C est diagonalisable si et seulement si le polynôme caractéristique de C est scindé à racines simples.

II.4. a) On considère un polynôme unitaire $P \in \mathbf{R}[X]$ de degré p. Montrer qu'il existe un unique p-uplet $(a_1, \ldots, a_p) \in \mathbf{R}^p$ tel que P soit le polynôme caractéristique de la matrice $C = C(a_1, \ldots, a_p)$.

b) Étant donné un polynôme Q de $\mathbf{R}[X]$, donner une condition nécessaire et suffisante portant sur Q pour que ce polynôme soit le polynôme caractéristique d'une matrice.

(d'après Centrale-Supélec 2019)

Problème III. Étude d'une courbe

On considère deux fonctions f et g de la variable réelle t définies par

$$f(t) = \frac{t^2}{1-t^2} \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{t^3}{1-t^2}.$$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct, on considère le point $M(t)$ de coordonnées $(f(t), g(t))$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe paramétrée $\left\{M(t) \mid t \in \mathbf{R} \setminus \{\pm 1\}\right\}$.

Deux fonctions.

III.1. Déterminer les ensembles de définition des fonctions f et g.

III.2. Calculer $f(\sqrt{3})$ et $g(\sqrt{3})$.

III.3. Justifier que f est une fonction paire et g une fonction impaire. Que peut-on en déduire pour le point $M(-t)$ par rapport au point $M(t)$?

III.4. Déterminer des fonctions équivalentes aux fonctions f et g en $+\infty$. En déduire les limites de f et g en $+\infty$.

III.5. Déterminer les limites de f et g en 1 à gauche, puis à droite (il y a donc quatre limites à calculer en tout).

III.6. Justifier que les fonctions f et g sont dérivables sur $[0;1[$ et sur $]1;+\infty[$, de dérivées respectives

$$f'(t) = \frac{2t}{(1-t^2)^2} \quad \text{et} \quad g'(t) = \frac{t^2(3-t^2)}{(1-t^2)^2}.$$

III.7. Déduire des questions précédentes les tableaux de variations des fonctions f et g sur $[0;1[\,\cup\,]1;+\infty[$, dans lesquels figureront les limites, ainsi que les valeurs de f et g en $\sqrt{3}$.

Tangente à l'origine et au point $M(\sqrt{3})$.

III.8. Rappeler (sans justification) le développement limité en 0 à l'ordre 1 de $u \mapsto \frac{1}{1-u}$.

III.9. Déterminer les développements limités des fonctions f et g en 0 à l'ordre 3.

III.10. Sans calculer les dérivées secondes f'' et g'' des fonctions f et g, montrer que $f''(0) = 2$ et $g''(0) = 0$. Le théorème utilisé sera mentionné.

III.11. En déduire les coordonnées d'un vecteur tangent à la courbe $\mathcal{C}$ en l'origine du repère.

III.12. Déterminer les coordonnées d'un vecteur tangent à la courbe $\mathcal{C}$ au point $M(\sqrt{3})$.

Asymptotes. On note $\mathcal{D}$ la droite du plan d'équation $y = x - \frac{1}{2}$. Pour t appartenant à l'ensemble de définition de f, on note $N(t)$ le point de $\mathcal{D}$ d'abscisse $f(t)$.

III.13. Sachant que les limites respectives de f et g en $+\infty$ sont -1 et $-\infty$, donner une interprétation graphique de la courbe $\mathcal{C}$ vis-à-vis de la droite d'équation $x = -1$ au voisinage de $t = +\infty$. Dessiner sur la copie l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ et la droite d'équation $x = -1$ au voisinage de $t = +\infty$.

III.14. Déterminer l'ordonnée $y_{N(t)}$ de $N(t)$ en fonction de $f(t)$.

On se propose dans la suite de cette partie d'examiner la quantité $g(t) - y_{N(t)}$ qui représente la distance algébrique entre les points $M(t)$ et $N(t)$.

III.15. Factoriser le trinôme $P(t) = -2t^2 + t + 1$.

III.16. On considère sur $[0; 1[\cup]1; +\infty[$ la fonction $\delta\colon t \mapsto g(t) - f(t) + \frac{1}{2}$. Montrer que, pour tout $t \in [0; 1[\cup]1; +\infty[$, $\delta(t) = \dfrac{P(t)}{2(t+1)}$.

III.17. Quel est le signe de $\delta(t)$ lorsque t est au voisinage de 1 ?

III.18. Déterminer la limite de la quantité $g(t) - y_{N(t)}$ lorsque t tend vers 1. Dessiner sur la copie l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de $t = 1$.

Tracé de la courbe.

III.19. En tenant compte des informations issues des questions précédentes et en utilisant le document-réponse (à rendre avec la copie), tracer la courbe suivante :

$$\mathcal{C}_1 = \{M(t) \mid t \in [0; 1[\cup]1; +\infty[\}\,.$$

On utilisera l'échelle suivante : 2 cm pour une unité sur l'axe des abscisses et 2 cm pour une unité sur l'axe des ordonnées. On considérera par ailleurs que $\sqrt{3} \simeq 1{,}73$.

On fera apparaître :

- la droite $\mathcal{D}$;
- les vecteurs tangents à l'origine du repère et au point $M(\sqrt{3})$;
- la droite d'équation $x = -1$.

III.20. En utilisant une couleur différente ou en pointillés, compléter le tracé précédent en traçant la courbe suivante :

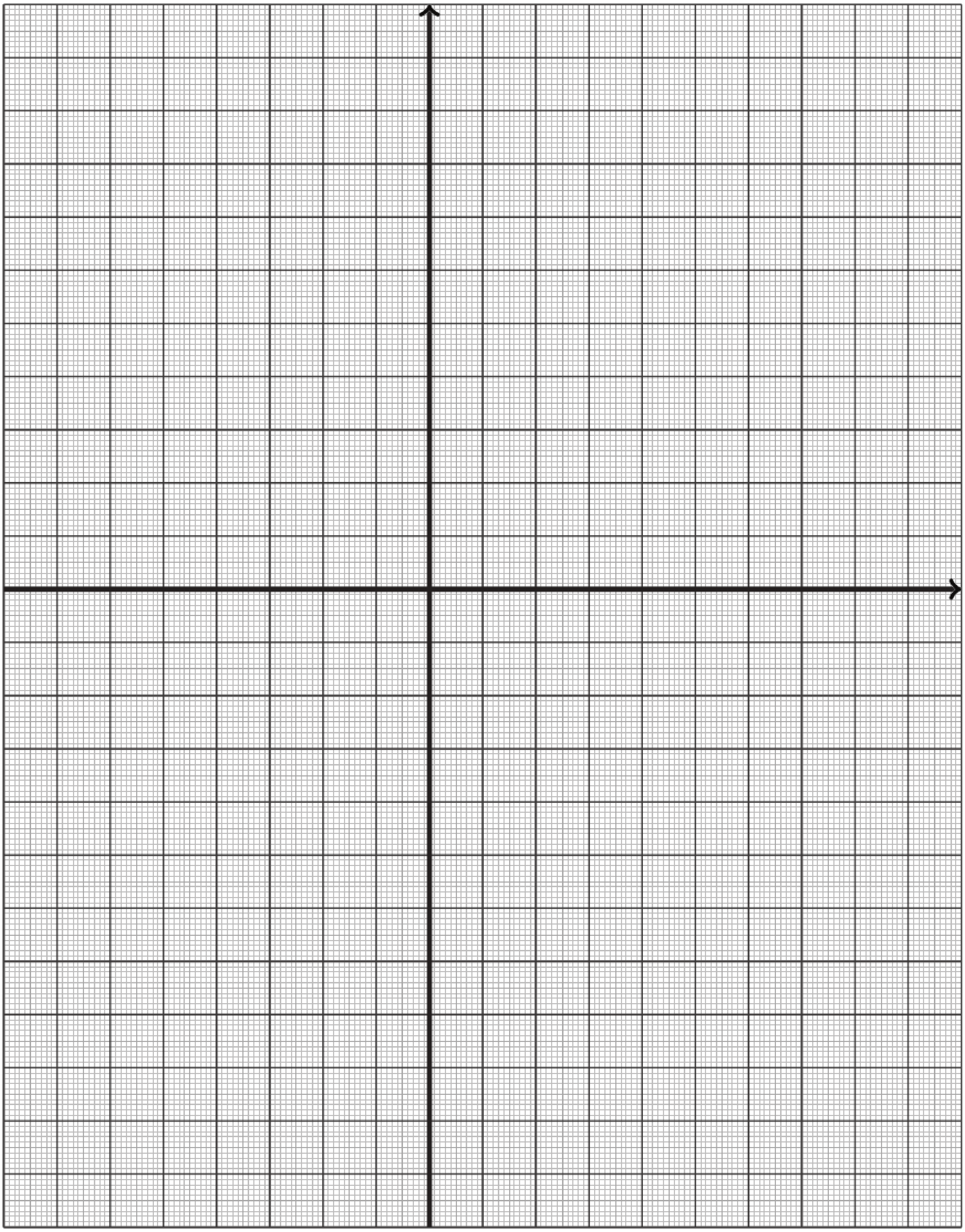
$$\mathcal{C}_2 = \{M(t) \mid t \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0]\}\,.$$

(d'après CCINP 2017)

DOCUMENT RÉPONSE
(à rendre avec la copie)

Nom et prénom :

II.19 et **II.20.**



DR1