Problème I. Étude d'une chaîne de Markov

I.1. À l'instant initial, les deux ampoules sont allumées, autrement dit $X_0 = 2$ avec probabilité 1 (loi certaine). On a donc $\mathbf{E}(X_0) = 2$ et $\mathbf{V}(X_0) = 0$.

I.2. Si $X_n = 2$, cela signifie que les deux ampoules sont allumées à l'instant n. Pour avoir $X_{n+1} = 2$, il faut qu'elles restent allumées. Chacune reste allumée avec probabilité $\frac{1}{2}$, et les deux ampoules sont indépendantes, donc la probabilité qu'elles restent allumées est $\mathbf{P}_{X_n=2}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Au contraire, pour avoir $X_{n+1} = 1$, il faut qu'exactement une ampoule grille, c'est-à-dire qu'une grille tandis que l'autre reste allumée. Comme les ampoules sont indépendantes, la probabilité que la première grille tandis que la deuxième reste allumée est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$; de même pour la probabilité que la deuxième grille tandis que la première reste allumée. Au final, $\mathbf{P}_{X_n=2}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

I.3. On a $\mathbf{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{4}$, $\mathbf{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2) = 0$, $\mathbf{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}$, $\mathbf{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{2}$, $\mathbf{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 2) = 0$, $\mathbf{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) = 0$ et $\mathbf{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0) = 1$.

I.4. Les événements $X_n = 0$, $X_n = 1$ et $X_n = 2$ forment un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, on a donc

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_{n+1} = 1) &= \mathbf{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1)\mathbf{P}(X_n = 0) + \mathbf{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1)\mathbf{P}(X_n = 1) \\ &\quad + \mathbf{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1)\mathbf{P}(X_n = 2) \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{P}(X_n = 1) + \frac{1}{2}\mathbf{P}(X_n = 2).\end{aligned}$$

De même, $\mathbf{P}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{4}\mathbf{P}(X_n = 2)$ et $\mathbf{P}(X_{n+1} = 0) = \mathbf{P}(X_n = 0) + \frac{1}{2}\mathbf{P}(X_n = 1) + \frac{1}{4}\mathbf{P}(X_n = 2)$, autrement dit

$$\begin{pmatrix}\mathbf{P}(X_{n+1} = 0)\\ \mathbf{P}(X_{n+1} = 1)\\ \mathbf{P}(X_{n+1} = 2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1/2 & 1/4\\ 0 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 0 & 1/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{P}(X_n = 0)\\ \mathbf{P}(X_n = 1)\\ \mathbf{P}(X_n = 2)\end{pmatrix}.$$

I.5. a) Par définition, $\mathbf{E}(X_n) = 0 \cdot \mathbf{P}(X_n = 0) + 1 \cdot \mathbf{P}(X_n = 1) + 2 \cdot \mathbf{P}(X_n = 2) = \begin{pmatrix}0 & 1 & 2\end{pmatrix} \cdot U_n$.

b)

$$L_1A = \begin{pmatrix}0 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1/2 & 1/4\\ 0 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 0 & 1/4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}L_1.$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\mathbf{E}(X_{n+1}) = L_1U_{n+1} = L_1AU_n = \frac{1}{2}L_1U_n = \frac{1}{2}\mathbf{E}(X_n).$$

c) Par récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{E}(X_n) = \frac{1}{2^n}\mathbf{E}(X_0) = \frac{1}{2^{n-1}}$.

I.6. a) D'après la formule de transfert, $\mathbf{E}(X_n^2) = 0^2 \cdot \mathbf{P}(X_n = 0) + 1^2 \cdot \mathbf{P}(X_n = 1) + 2^2\mathbf{P}(X_n = 2) = L_2U_n$.

b)

$$L_2A = \begin{pmatrix}0 & 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1/2 & 1/4\\ 0 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 0 & 1/4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}.$$

On a donc, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$,

$$L_2A = \alpha L_1 + \beta L_2 \iff \begin{cases}0 = 0 \cdot \alpha + 0 \cdot \beta\\ \frac{1}{2} = \alpha + \beta\\ \frac{3}{2} = 2\alpha + 4\beta\end{cases} \iff \alpha = \beta = \frac{1}{4}.$$

Ainsi, $L_2A = \frac{1}{4}L_1 + \frac{1}{4}L_2$.

c) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a donc

$$\mathbf{E}(X_{n+1})^2 = L_2 U_{n+1} = L_2 A U_n = \tfrac{1}{4} L_1 U_n + \tfrac{1}{4} L_2 U_n = \tfrac{1}{4}\mathbf{E}(X_n) + \tfrac{1}{4}\mathbf{E}(X_n^2),$$

or d'après la question (5) $\mathbf{E}(X_n) = \frac{1}{2^{n-1}}$ donc $\frac{1}{4}\mathbf{E}(X_n) = \frac{1}{4\cdot 2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n+1}}$, ce qui montre le résultat souhaité.

d) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2^n}$. Par ailleurs,

$$\tfrac{1}{4} u_n + \tfrac{1}{2^{n+1}} = \tfrac{1}{4}\tfrac{1}{2^{n-1}} + \tfrac{1}{2^{n+1}} = \tfrac{2}{2^{n+1}} = \tfrac{1}{2^n}.$$

On a donc bien $u_{n+1} = \frac{1}{4} u_n + \frac{1}{2^{n+1}}$.

e) Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors, d'après les questions précédentes,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \mathbf{E}(X_{n+1}^2) - u_{n+1} = \tfrac{1}{4}\mathbf{E}(X_n^2) + \tfrac{1}{2^{n+1}} - \left(\tfrac{1}{4} u_n + \tfrac{1}{2^{n+1}}\right) \\ &= \tfrac{1}{4}\mathbf{E}(X_n^2) - \tfrac{1}{4} u_n = \tfrac{1}{4} v_n. \end{aligned}$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est donc géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

f) On a donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n = \frac{1}{4^n} v_0 = \frac{1}{4^n}(\mathbf{E}(X_0^2) - \frac{1}{2^{-1}}) = \frac{1}{2^{2n}}(4-2) = \frac{1}{2^{2n-1}}$. On en déduit que $\mathbf{E}(X_n^2) = v_n + u_n = \frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1+2^n}{2^{2n-1}}$

I.7. D'après la formule de König-Huygens, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = \frac{1+2^n}{2^{2n-1}} - \frac{1}{2^{2n-2}} = \frac{2^n - 1}{2^{2n-1}}.$$

Problème II. Matrices compagnons

II.1. a) On applique la définition du polynôme caractéristique :

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} \overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3}{=} \begin{vmatrix} \lambda-1 & \lambda-1 & \lambda-1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 C_3 \leftarrow C_3 - C_1}{=} \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2).$$

b) La matrice A est de taille 3 et admet trois valeurs propres réelles distinctes, ± 1 et 2 : elle est donc diagonalisable. Pour construire la matrice P, calculons les sous-espaces propres de A.

$\boxed{\lambda = 1}$: soit $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{R}^3$. Alors :

$$AX = X \iff \begin{cases} -2z = x \\ x + z = y \\ y + 2z = z \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2z \\ y = -z \\ \cancel{z = z} \end{cases} \text{ donc } E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

$\boxed{\lambda = -1}$:

$$AX = -X \iff \begin{cases} -2z = -x \\ x + z = -y \\ y + 2z = -z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2z \\ y = -3z \\ \cancel{-z = -z} \end{cases} \text{ donc } E_{-1} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

$\boxed{\lambda = 2}$:

$$AX = 2X \iff \begin{cases} -2z = 2x \\ x + z = 2y \\ y + 2z = \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \\ \cancel{2z = 2z} \end{cases} \text{ donc } E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

On en déduit que les matrices $P = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ conviennent.

II.2. a)

$$\chi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -1 & \lambda & 3 \\ 0 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} \overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3}{=} \begin{vmatrix} \lambda-1 & \lambda-1 & \lambda-1 \\ -1 & \lambda & 3 \\ 0 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{C_2 \leftarrow C_2 - C_1, C_3 \leftarrow C_3 - C_1}{=} \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda+1 & 4 \\ 0 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1) \begin{vmatrix} \lambda+1 & 4 \\ -1 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)((\lambda+1)(\lambda-3)+4) = (\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+1) = (\lambda-1)^3.$$

La matrice B possède donc $\lambda = 1$ pour unique valeur propre triple. Déterminons le sous-espace propre correspondant :

$$BX = X \iff \left\{ \begin{array}{r} z = x \\ x - 3z = y \\ y + 3z = z \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{r} x = z \\ y = -2z \\ \cancel{z = z} \end{array} \right. \quad \text{donc } E_1 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

b) La valeur propre 1 est triple mais le sous-espace propre correspondant est de dimension $1 < 3$, on en déduit que la matrice B n'est pas diagonalisable. En revanche, le polynôme caractéristique de B étant scindé sur $\mathbf{R}$, B est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

c) On résout le système $B \cdot v_2 = v_1 + v_2$:

$$B \cdot v_2 = v_1 + v_2 \iff \left\{ \begin{array}{l} 0 = 1 + x \\ x = -2 + y \\ y = 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = -1 \\ \cancel{x = -1} \\ y = 1 \end{array} \right.$$

On en déduit que le vecteur $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ est le seul qui convienne.

d) De même,

$$B \cdot v_3 = v_2 + v_3 \iff \left\{ \begin{array}{l} 0 = -1 + z \\ z = t + 1 \\ t = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} z = 1 \\ \cancel{z = 1} \\ t = 0 \end{array} \right.$$

Ainsi, l'unique solution est $v_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

e) Commençons par observer que le déterminant, dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$, de (v_3, v_2, v_1) est triangulaire supérieur à coefficients diagonaux tous non nuls, donc non nul. Ainsi, (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbf{R}^3$

Le vecteur v_1 est un vecteur propre associé à la valeur propre 1. D'après les deux questions précédentes, on en déduit que la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à B dans la base (v_1, v_2, v_3) est T. On choisit donc pour matrice R la matrice de passage de la base canonique de $\mathbf{R}^3$ à (v_1, v_2, v_3), autrement dit :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

II.3. a) Raisonnons par récurrence sur $p \in \mathbf{N}^\star$.

Si $p = 1$, alors $C = C(a_1) = \begin{pmatrix} a_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_1(\mathbf{R})$ donc $\chi_C(\lambda) = \lambda - a_1$, ce qui correspond bien à la formule donnée.

Soit maintenant $p \in \mathbf{N}^\star$. On suppose l'hypothèse de récurrence vraie au rang p, c'est-à-dire que le polynôme caractéristique de toute matrice $C(b_1, \ldots, b_p)$ est donné par la formule de l'énoncé.

Soient donc $(a_1, \dots, a_{p+1}) \in \mathbf{R}^{p+1}$. Le polynôme caractéristique de $C = C(a_1, \dots, a_{p+1})$ est

$$\chi_C(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ -1 & \lambda & \ddots & \vdots & -a_2 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & -a_p \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \lambda - a_{p+1} \end{vmatrix} \quad \text{(de taille } p+1\text{)}$$

On développe ce déterminant par rapport à sa première ligne :

$$\chi_C(\lambda) = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ -1 & \lambda & \ddots & \vdots & -a_3 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & -a_p \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \lambda - a_{p+1} \end{vmatrix} + (-1)^{p+2}(-a_1) \begin{vmatrix} -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \lambda \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

On reconnaît dans le premier terme le polynôme caractéristique de $C(a_2, \dots, a_{p+1})$, pour lequel on peut appliquer l'hypothèse de récurrence puisqu'il est de taille n. Le déterminant du second terme est triangulaire supérieur et vaut $(-1)^p$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \chi_C(\lambda) &= \lambda(\lambda^p - a_{p+1}\lambda^{p-1} - \cdots - a_3\lambda - a_2) + (-1)^{2p+2}(-a_1) \\ &= \lambda^{p+1} - a_{p+1}\lambda^p - \cdots - a_3\lambda^2 - a_2\lambda - a_1, \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

La proposition est donc vraie par principe de récurrence.

b) Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$C - \lambda I_p = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 1 & -\lambda & \ddots & \vdots & a_2 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\lambda + a_p \end{pmatrix}.$$

On observe que la sous-famille constituée des $p-1$ premières colonnes de cette matrice ne peut qu'être libre (le système correspondant à une combinaison linéaire nulle de ces colonnes est échelonné et possède pour unique solution la solution nulle). Le rang d'une matrice étant égal au rang de ses vecteurs colonnes, on en déduit donc que celui-ci est supérieur ou égal à $p-1$.

D'après le théorème du rang, on en déduit que le noyau de $C - \lambda I_p$ est de dimension inférieure ou égale à 1. Or, si λ est une valeur propre de C, alors $\mathrm{Ker}(C - \lambda I_p) = \mathrm{Ker}(\lambda I_p - C)$ est exactement le sous-espace propre de C associé à la valeur propre λ. On en déduit donc que tous les sous-espaces propres de C sont de dimension inférieure ou égale à 1, donc égale à 1 (un sous-espace propre ne pouvant pas être réduit à $\{0\}$)

c) On sait qu'une matrice est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique et scindé et que chaque sous-espace propre est de dimension égale à la multiplicité de la valeur propre correspondante. D'après la question précédente, tous les sous-espaces propres étant de dimension 1, on en déduit que C est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé et que toutes les valeurs propres sont simples.

II.4. a) Soit P unitaire de degré p. Il existe donc des coefficients $a_1, \dots, a_p$ tels qu'on puisse écrire $P = X^p - a_{p-1}X^{p-1} - \cdots - a_2X - a_1$. Mais alors, d'après la question **II.3.a)**, P est le polynôme caractéristique de la matrice $C(a_1, \dots, a_p)$.

b) D'après la question précédente, si Q est unitaire, on peut l'écrire comme polynôme caractéristique d'une matrice $C(a_1, \ldots, a_p)$ où $= \deg Q$. Réciproquement, on sait que le polynôme caractéristique de toute matrice est unitaire. Le polynôme Q peut donc s'écrire comme polynôme caractéristique d'une matrice si et seulement s'il est unitaire.

Problème III. Étude d'une courbe

Deux fonctions.

III.1. Les fonctions f et g sont bien définies tant que leur dénominateur ne s'annule pas, autrement dit sur $\mathbf{R} \setminus \{\pm 1\}$.

III.2. $f(\sqrt{3}) = \frac{3}{1-3} = -\frac{3}{2}$ et $g(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{1-3} = -\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

III.3. On remarque que les domaines de définition de f et g sont symétriques par rapport à l'origine. De plus, pour tout $t \neq \pm 1$,

$$\begin{cases} f(-t) = \frac{(-t)^2}{1-(-t)^2} = \frac{t^2}{1-t^2} = f(t) \\ g(-t) = \frac{(-t)^3}{1-(-t)^2} = \frac{-t^3}{1-t^2} = -g(t). \end{cases}$$

On en déduit que la fonction f est paire et la fonction g impaire. Le point $M(-t)$ est donc de même abscisse, mais d'ordonnée opposée, au point $M(t)$; il s'agit donc de son symétrique par rapport à l'axe (Ox).

III.4. Pour t tendant vers $+\infty$, $f(t) \sim \frac{t^2}{-t^2} = -1$ et $g(t) \sim \frac{t^3}{-t^2} = -t$. On en déduit que f tend vers -1 et g vers $-\infty$

III.5. Pour t tendant vers 1, le dénominateur $1 - t^2$ tend vers 0^+ si $t < 1$ et 0^- si $t > 1$, tandis que les deux numérateurs t^2 et t^3 tendent vers 1 ; on en déduit les quatre limites :

$$\lim_{t \to 1^-} f(t) = +\infty; \quad \lim_{t \to 1^+} f(t) = -\infty; \quad \lim_{t \to 1^-} g(t) = +\infty; \quad \lim_{t \to 1^+} g(t) = -\infty.$$

III.6. Par composition, les fonctions f et g sont dérivables sur $[0;1[$ et sur $]1;+\infty[$. Pour tout $t \neq 1$, on a

$$\begin{cases} f'(t) = \frac{2t(1-t^2)-t^2(-2t)}{(1-t^2)^2} = \frac{2t}{(1-t^2)^2} \\ g'(t) = \frac{3t^2(1-t^2)-t^3(-2t)}{(1-t^2)^2} = \frac{3t^2-t^4}{(1-t^2)^2} = \frac{t^2(3-t^2)}{(1-t^2)^2} \end{cases}$$

III.7. Pour dresser les tableaux de variations, il s'agit d'étudier le signe des dérivées f' et g'. On voit que f' est positive sur $[0;1[\cup]1;+\infty[$ et s'annule en $t = 0$; de son côté, g' est positive sur $[0;1[\cup]1;\sqrt{3}]$, puis négative sur $[\sqrt{3};+\infty[$, avec annulation en 0 et en $\sqrt{3}$. On en déduit le tableau :

t	0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(t)$	0	$+$	$\Vert$	$+$		$+$	
$g'(t)$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(t)$		$0 \nearrow +\infty$	$\Vert$	$-\infty \nearrow$	$-3/2$	$\nearrow -1$	
$g(t)$		$0 \nearrow +\infty$	$\Vert$	$-\infty \nearrow$	$-3\sqrt{3}/2$	$\searrow -\infty$	

Tangente à l'origine et au point $M(\sqrt{3})$.

III.8. $\frac{1}{1-u} = 1 + u + o(u)$.

III.9. Si $t \to 0$, alors $t^2 \to 0$ donc on peut écrire, d'après la formule précédente, $\frac{1}{1-t^2} = 1 + t^2 + o(t^2)$. En multipliant par les numérateurs respectifs, on obtient

$$\begin{cases} f(t) = t^2(1 + t^2 + o(t^2)) = t^2 + o(t^3) \\ g(t) = t^3(1 + t^2 + o(t^2)) = t^3 + o(t^3) \end{cases}$$

III.10. D'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 (car les fonctions f et g sont de classe $\mathcal{C}^3$ au voisinage de 0, par composition) on peut écrire

$$\begin{cases} f(t) = f(0) + tf'(0) + \frac{t^2}{2}f''(0) + \frac{t^3}{6}f'''(0) + o(t^3) \\ g(t) = g(0) + tg'(0) + \frac{t^2}{2}g''(0) + \frac{t^3}{6}g'''(0) + o(t^3) \end{cases}$$

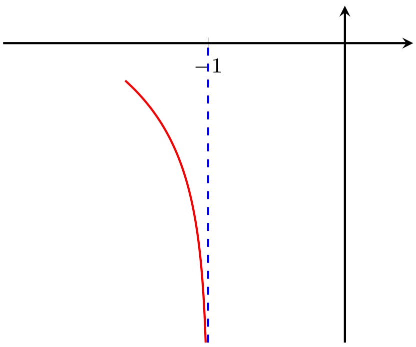
Par unicité du développement limité, on peut identifier ces formules avec celles de la question précédente. En particulier, en identifiant les termes de degré 2 : $\frac{t^2}{2}f''(0) = t^2$ donc $f''(0) = 2$ et $\frac{t^2}{2}g''(0) = 0$ donc $g''(0) = 0$.

III.11. On a $M(0) = (0, 0)$ donc un vecteur tangent à la courbe en l'origine du repère est donné par le premier vecteur dérivé non nul de (f, g) en $t = 0$. D'après les questions précédentes, il s'agit du vecteur dérivé d'ordre 2 et il vaut $\binom{2}{0}$. Un vecteur tangent à $\mathcal{C}$ en l'origine est donc $\binom{1}{0}$.

III.12. On a $g'(\sqrt{3}) = 0$ mais $f'(\sqrt{3}) \neq 0$, donc la courbe admet en $M(\sqrt{3})$ une tangente horizontale. Un vecteur tangent est donc $\binom{1}{0}$.

Asymptotes.

III.13. On en déduit que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$ au voisinage de $t = +\infty$.



On note que $f(t) < 1$ et $g(t) \to -\infty$ donc la courbe reste à gauche de l'asymptote et se dirige vers le bas.

III.14. Par définition, $N(t)$ est le point de $\mathcal{D}$ d'abscisse $f(t)$. Une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ étant $y = x - \frac{1}{2}$, on a donc $y_{N(t)} = f(t) - \frac{1}{2}$.

III.15. On remarque que $t = 1$ est racine : on peut donc écrire $P(t) = -2t^2 + t + 1 = -2(t-1)(t + \frac{1}{2})$.

III.16. Pour tout $t \neq 1$,

$$\delta(t) = \frac{t^3 - t^2}{1 - t^2} + \frac{1}{2} = \frac{t^2(t-1)}{(1-t)(1+t)} + \frac{1}{2} = \frac{-t^2}{1+t} + \frac{1}{2}.$$

En réduisant au même dénominateur, on obtient

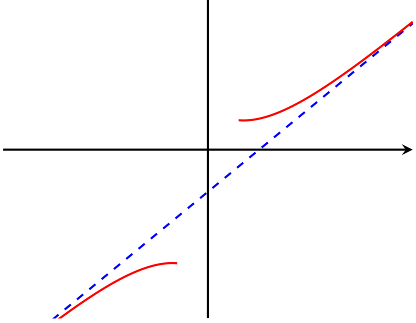
$$\delta(t) = \frac{-2t^2 + (1+t)}{2(1+t)} = \frac{P(t)}{2(1+t)}.$$

III.17. Pour tout t au voisinage de 1, le dénominateur $1 + t$ est positif. Pour ce qui est du signe du numérateur $P(t)$, on utilise la factorisation de la question (14) :

t		1	
-2	$-$		$-$
$t + \frac{1}{2}$	$+$		$+$
$(t-1)$	$-$	0	$+$
$P(t)$	$+$	0	$-$

On en déduit qu'au voisinage de 1, $\delta(t)$ est positif si $t < 1$ et négatif si $t > 1$.

III.18. D'après la question (14), $g(t) - y_{N(t)} = \delta(t) = \frac{P(t)}{2(1+t)}$. Lorsque $t \to 1$, $1 + t \to 2$ et $P(t) \to 0$ donc $\delta(t) \to 0$. On en déduit que la droite $\mathcal{D}$ est une asymptote oblique de la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de $t = 1$.



Pour $t \to 1^-$, $f(t)$ et $g(t)$ tendent vers $+\infty$ donc la courbe se dirige vers le haut à droite ; on a $\delta(t) > 0$ donc la courbe est au-dessus de son asymptote.
Pour $t \to 1^+$, $f(t)$ et $g(t)$ tendent vers $-\infty$ donc la courbe se dirige vers le bas à gauche ; on a $\delta(t) < 0$ donc la courbe est en-dessous de son asymptote.

Tracé de la courbe.

III.19. et **I.20.**