Samedi 8 janvier 2022 – Durée : 4h

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice I

Q1. Étudier la convergence de l'intégrale généralisée $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-t^2)\,\mathrm{d}t$.

Le but de l'exercice est de calculer la valeur de I.

I.A. Trois suites d'intégrales.

Q2. Montrer que, pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.

Q3. Déduire de la question précédente que, pour tous $n \in \mathbf{N}^\star$ et $t \in [0; \sqrt{n}]$,

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq \exp(-t^2).$$

Q4. Montrer que, pour tous $n \in \mathbf{N}^\star$ et $t \in [0; \sqrt{n}]$,

$$\exp(-t^2) \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}.$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on considère les intégrales

$$u_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t, \qquad I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \exp(-t^2)\,\mathrm{d}t$$

et l'intégrale généralisée

$$v_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t.$$

Q5. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Montrer que l'intégrale v_n est convergente.

Q6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $u_n \leq I_n$.

Q7. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$,

$$I_n \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t.$$

Q8. Déduire de la question précédente l'encadrement $u_n \leq I_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$.

I.B. Calcul de l'intégrale de Gauss.

On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $a_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,\mathrm{d}x$ (n-ème intégrale de Wallis). On admet que, pour n tendant vers l'infini, $a_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

Q9. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. À l'aide du changement de variables $t = \sqrt{n} \cdot \sin x$, exprimer u_n en fonction de a_{2n+1}.

Q10. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. À l'aide du changement de variables $t = \sqrt{n} \cdot \tan x$, montrer que $v_n = \sqrt{n} \cdot a_{2n-2}$.

Q11. En exprimant de deux manières différentes la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ lorsque n tend vers $+\infty$, déterminer la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-t^2)\,\mathrm{d}t$.

(d'après CCINP TPC 2019)

Exercice II

Pour tous réels a et b, on définit la matrice

$$P(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

et on note $F = \{P(a,b) \mid (a,b) \in \mathbf{R}^2\}$ l'ensemble de toutes les matrices $P(a,b)$. On pose également

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Q1. Montrer que I_3 et N appartiennent à l'ensemble F.

Q2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ et que (I_3, N) est une base de F.

Q3. (a) Calculer N^2 et déterminer deux réels $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $N^2 = aI_3 + bN$. Quelles sont les coordonnées de N^2 dans la base (I_3, N) ?

(b) Déduire de la question précédente que N est inversible, que son inverse N^{-1} appartient à F, et donner les coordonnées de N^{-1} dans la base (I_3, N).

(c) Le réel 0 est-il une valeur propre de N ?

Q4. (a) Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice N. Montrer que N admet deux valeurs propres distinctes et donner leurs multiplicités.

(b) Montrer que N est diagonalisable ; déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $N = PDP^{-1}$. On ne demande pas de calculer P^{-1}.

Q5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe deux réels a_n et b_n tels que $N^n = P(a_n, b_n)$ et que ces réels vérifient la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbf{N} \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Dans toute la suite, on note $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Q6. Déterminer une matrice diagonale B dont les termes diagonaux sont rangés dans l'ordre croissant et une matrice inversible Q dont la deuxième ligne est $(1,1)$ telles que $A = QBQ^{-1}$.

Q7. En déduire, pour tout $n \in \mathbf{N}$, une expression de A^n.

Q8. En déduire, pour tout $n \in \mathbf{N}$, une expression de N^n.

(d'après ATS 2021)

⋆ ⋆ ⋆

Exercice III

On considère une rue infiniment longue et rectiligne. On souhaite aller à un numéro précis de cette rue.

Devant chaque numéro se trouve une place de parking. On cherche à savoir à partir de quel moment on doit commencer à s'intéresser aux places disponibles pour pouvoir se garer au plus près de l'arrivée.

Au départ, nous sommes au début de la rue. Par convention, nous poserons que le début de la rue a pour numéro 0. Devant chaque numéro n, il y a une place de parking qui peut être libre avec une probabilité $p \in]0;1[$. On suppose que p ne dépend pas de n et que les occupations des places sont indépendantes les unes par rapport aux autres.

Notre stratégie est la suivante : on choisit s un entier naturel. On roule sans interruption jusqu'au numéro s de la rue et on choisit la première place disponible à partir du numéro s (inclus).

On note X le numéro de la place libre trouvée par cette méthode.

III.A. Loi de X.

Q1. Donner l'univers-image de X.

Q2. Déterminer la loi de X.

Q3. Soit $Y = X - s + 1$. Montrer que Y suit une loi géométrique de paramètre p. Rappeler l'espérance et la variance de Y.

Q4. En déduire l'espérance et la variance de X.

III.B. Calcul de la distance moyenne à l'arrivée. Notons $d \in \mathbf{N}^\star$ le numéro où l'on souhaite se rendre. Notre stratégie consiste à choisir un numéro s compris entre 0 et d (pour rappel, $s = 0$ correspond à chercher une place dès le début de la rue).

La distance à l'objectif est $|X - d|$, son espérance $D_s = \mathbf{E}(|X - d|)$ est la distance moyenne à l'arrivée (on admet que D_s existe).

Pour simplifier, on prend $p = \frac{1}{10}$ dans cette partie.

Q5. Montrer que $D_s = S_1 + S_2$, où

$$S_1 = \sum_{n=s}^{d} (d-n) \cdot \mathbf{P}(X = n) \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{n=d+1}^{+\infty} (n-d) \cdot \mathbf{P}(X = n)$$

(on admet que S_2 converge).

Q6. On considère la suite $(u_k)_{k \in \mathbf{N}}$ définie pour tout $k \in \mathbf{N}$ par

$$u_k = \sum_{i=0}^{k} (k-i) \left(\frac{9}{10}\right)^i.$$

Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $u_{k+1} = \frac{9}{10} u_k + k + 1$ (on pourra effectuer le changement d'indice $j = i - 1$).

Q7. Montrer par récurrence sur k que, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$u_k = 10k - 90 + 90 \left(\frac{9}{10}\right)^k.$$

Q8. Exprimer S_1 à l'aide de u_{d-s}, puis donner l'expression de S_1 en fonction de d et s.

Q9. Justifier que $S_2 - S_1 = \mathbf{E}(X - d)$. En déduire la valeur de S_2, puis de D_s.

III.C. Optimisation. Dans cette partie, on ne suppose plus nécessairement que $p = \frac{1}{10}$.

On admet que, pour tout $p \in]0;1[$, $D_s = d - s + 1 - \frac{1}{p} + \frac{2}{p}(1-p)^{d-s+1}$.

Q10. Simplifier $D_{s+1} - D_s$.

Q11. Étudier le signe de $D_{s+1} - D_s$. En déduire que D_s est minimale lorsque s est le plus petit entier strictement supérieur à α, où

$$\alpha = d + \frac{\ln 2}{\ln(1-p)}.$$

Q12. Dans cette question, on s'intéresse au cas où $p = \frac{1}{10}$. En utilisant l'encadrement $2^{-1/6} < 0{,}9 < 2^{-1/7}$, à quelle distance de l'arrivée doit-on commencer à chercher une place ?

Q13. On écrit le programme Python suivant pour simuler notre stratégie.

```
1  from random import random
2
3  def Bernoulli(q):
4    return (random() < q)
5
6  def distance(s,d,p):
7    X = ..........
8    while ..........:
9      X = ..........
10   return abs(X-d)
```

La fonction `Bernoulli` simule une variable de Bernoulli X : elle prend comme paramètre un nombre à virgule flottante `q` qui correspond au paramètre de la loi de Bernoulli, et renvoie un booléen qui vaut `True` si $X = 1$ et `False` si $X = 0$.

La fonction `distance` simule notre stratégie. Elle prend comme paramètres des entiers `s` et `d` et un nombre à virgule flottante `p`, qui correspondent aux variables introduites dans les parties précédentes, et renvoie un entier représentant la distance à parcourir en sortant de la voiture.

Recopier et compléter les lignes 7 à 9 du programme.

(d'après CCINP 2019)

⋆ ⋆
⋆