Exercice I

Q1. La fonction $t \mapsto \exp(-t^2)$ est continue et positive sur $[0;+\infty[$, l'intégrale admet une impropreté en $+\infty$. Pour tout $t \geq 1$, $t^2 \geq t$ donc $0 \leq \exp(-t^2) \leq \exp(-t)$. Or $\int_0^{+\infty} \exp(-t)$ est convergente, on en déduit que l'intégrale I est convergente d'après le théorème de comparaison.

I.A. Trois suites d'intégrales.

Q2. Pour tout $x > -1$, on pose $\varphi(x) = x - \ln(1+x)$. C'est une fonction dérivable par composition et, pour tout $x > -1$, $\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{1+x}$, qui est donc négative sur $]-1;0]$ et positive sur $[0;+\infty[$. La fonction φ admet donc un minimum en $x = 0$: pour tout $x > -1$, $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$. Autrement dit, pour tout $x > -1$, $x \geq \ln(1+x)$.

Q3. Soient $n \in \mathbf{N}^\star$ et $t \in [0;\sqrt{n}]$. On pose $x = -\frac{t^2}{n} > -1$. D'après la question précédente, on a donc

$$\ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leq -\frac{t^2}{n}.$$

On multiplie par n les deux membres de l'inégalité, puis on compose par l'exponentielle (ceci ne change pas le sens car $n \geq 0$ et l'exponentielle est une fonction croissante) :

$$\exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)\right) \leq \exp(-t^2),$$

autrement dit

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq \exp(-t^2).$$

Q4. On procède de même qu'à la question précédente, en posant $x = \frac{t^2}{n} \geq 0 > -1$. On en déduit $\ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right) \leq \frac{t^2}{n}$, puis on multiple par $-n$ (ce qui change le sens de l'inégalité) et on applique l'exponentielle : $\exp(-t^2) \leq \exp\left(-n \ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)\right) = \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$.

Q5. La fonction $t \mapsto \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$ est continue sur $[0;+\infty[$ (par composition) et positive. On a une unique impropreté en $+\infty$. Mais pour $t \to +\infty$, $1 + \frac{t^2}{n} \sim \frac{t^2}{n}$ donc $\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \sim \left(\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \sim \frac{n^n}{t^{2n}}$. Or $\int_1^{+\infty} \frac{n^n}{t^{2n}}\,\mathrm{d}t = n^n \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{2n}}$ est convergente car c'est une intégrale de Riemann d'exposant $2n \geq 2 > 1$ (car $n \geq 1$). On en déduit, par théorème de comparaison, que $\int_1^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t$ converge, donc que $\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t$ (puisque la fonction intégrée est continue sur $[0;1]$).

Q6. D'après **Q3**, $\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq \exp(-t^2)$ pour tout $t \in [0;\sqrt{n}]$. Par croissance de l'intégrale (car $0 \leq \sqrt{n}$), on en déduit que $u_n \leq I_n$.

Q7. De même qu'à la question précédente, d'après l'inégalité montrée à la question **Q4**.

Q8. L'inégalité de gauche $u_n \leq I_n$ est démontrée à la question **Q6**. D'autre part, d'après **Q6**, $I_n \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t$. Mais, d'après la relation de Chasles, on peut écrire

$$v_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t + \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t,$$

et l'intégrale de droite est positive car la fonction $t \mapsto \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$ est positive sur $[\sqrt{n};+\infty[$ et les bornes sont dans le bon ordre ($\sqrt{n} \leq +\infty$). Autrement dit, $v_n \geq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t$; donc $v_n \geq I_n$ d'après **Q6**.

I.B. Calcul de l'intégrale de Gauss.

Q9. Comme suggéré dans l'énoncé, on va faire le changement de variables $t = \sqrt{n}\sin x$, de classe $\mathcal{C}^1$. La relation entre les éléments différentiels s'écrit $\mathrm{d}t = \sqrt{n}\cos x\,\mathrm{d}x$ et, pour les bornes, on a

$$\begin{cases} t = 0 \iff \sqrt{n}\sin x = 0 \iff \sin x = 0 \text{ donc } x = 0 \\ t = \sqrt{n} \iff \sqrt{n}\sin x = \sqrt{n} \iff \sin x = 1 \text{ donc } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} u_n &= \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{n\sin^2 x}{n}\right)^n \sqrt{n}\cos x\,\mathrm{d}x \\ &= \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 x)^n \cos x\,\mathrm{d}x = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} (\cos^2 x)^n \cos x\,\mathrm{d}x \\ &= \sqrt{n}\, a_{2n+1}. \end{aligned}$$

Q10. De même qu'à la question précédente. On a $\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{n}}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ (on se souvient de l'égalité $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$), avec en bornes $t = 0$ donc $x = 0$ et $t \to +\infty \iff \tan x \to +\infty$ donc $x \to \pi/2$. S'agissant d'une intégrale impropre, on vérifie de plus que $x \mapsto \sqrt{n}\cdot\tan x$ est une fonction strictement croissante sur $[0;\pi/2[$. Alors

$$\begin{aligned} v_n &= \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} (1+\tan^2 x)^{-n} \frac{\sqrt{n}}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \\ &= \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^{-n} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2} x\,\mathrm{d}x \\ &= \sqrt{n}\, a_{2n-2}. \end{aligned}$$

Q11. D'après les questions **Q8**, **Q9** et **Q10**, on a donc, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $\sqrt{n}\,a_{2n+1} \leq I_n \leq \sqrt{n}\,a_{2n-2}$. Par ailleurs, d'après le préambule de la partie **I.B**, $a_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ donc

$$\sqrt{n}\,a_{2n+1} \sim \sqrt{n}\sqrt{\tfrac{\pi}{2(2n+1)}} \sim \sqrt{\tfrac{n\pi}{4n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

De même, $\sqrt{n}\,a_{2n-2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Par théorème d'encadrement, on en déduit que $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Par ailleurs, $I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \exp(-t^2)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \exp(-t^2)\,\mathrm{d}t = I$ (car on a montré en **Q1** que cette intégrale converge). Par unicité de la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$, on en déduit que $I = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Exercice II

Q1. On peut écrire $I_3 = P(1,0)$ et $N = P(0,1)$, qui appartiennent donc bien à F.

Q2. Il est évident que F est inclus dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$, que $0 = P(0,0) \in F$, et on vérifie facilement que F est stable par combinaison linéaire, c'est donc bien un sous-espace vectoriel. La famille (I_3, N) est visiblement libre (ces deux matrices ne sont pas proportionnelles). Enfin, par définition, toute matrice de F s'écrit sous la forme $\left(\begin{smallmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{smallmatrix}\right) = aI_3 + bN \in \mathrm{Vect}(I_3, N)$; la famille (I_3, N) est donc génératrice de F, c'est donc une base.

Une manière alternative de résoudre cette question est de considérer l'application $\phi\colon \mathbf{R}^2 \to F$ définie par $\phi(a,b) = P(a,b)$. On montre facilement que c'est une application linéaire injective et surjective, bref un isomorphisme. On en déduit que $F = \mathrm{Im}\,\phi$ est un sous-espace vectoriel. Par ailleurs, les matrices $I_3 = P(1,0)$ et $N = P(0,1)$ sont l'image par l'isomorphisme ϕ d'une base de $\mathbf{R}^2$ (la base canonique), elles forment donc une base de F.

Q3. (a) $N^2 = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right) = P(2,1) = 2I_3 + N$. Autrement dit, les coordonnées de N^2 dans la base (I_3, N) sont $(2,1)$.

(b) D'après la question précédente, $N^2 = 2I_3 + N$ donc $N^2 - N = 2I_3$, ou encore $N(N - I_3) = 2I_3$. On en déduit que N est inversible, d'inverse $N^{-1} = \frac{1}{2}(N - I_3) = -\frac{1}{2}I_3 + \frac{1}{2}N$. Ainsi, $N^{-1} \in \mathrm{Vect}(I_3, N) = F$ et ses coordonnées dnas la base (I_3, N) sont $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

(c) N est inversible donc 0 n'est pas valeur propre de N.

Q4. (a) Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$,

$$\chi_N(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ \lambda-2 & \lambda & -1 \\ \lambda-2 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda-2)(\lambda+1)^2$$

On en déduit que N admet deux valeurs propres réelles distinctes : -1 (de multiplicité 2) et 2 (de multiplicité 1).

(b) On calcule les sous-espaces propres. Soit $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{R}^3$. Alors :

$$NX = -1 \iff \begin{cases} y+z = -x \\ x+z = -y \\ x+y = -z \end{cases} \iff x+y+z = 0$$

donc $E_{-1} = \mathrm{Vect}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\right)$, de dimension 2.

Par ailleurs,

$$NX = 2X \iff \begin{cases} y+z = 2x \\ x+z = 2y \\ x+y = 2z \end{cases} \iff x = y = z$$

donc $E_2 = \mathrm{Vect}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right)$, de dimension 1.

La somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la taille de la matrice N, on en déduit que celle-ci est diagonalisable ; on peut donc écrire $N = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Q5. On procède par récurrence sur $\mathbf{N}$. La propriété est vérifiée pour $n = 0$: $N^0 = I_3 = P(1,0)$. Ainsi $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$.

Soit maintenant $n \in \mathbf{N}$. On suppose qu'il existe $a_n, b_n \in \mathbf{R}$ tels que $N^n = P(a_n, b_n)$. Alors

$$N^{n+1} = N \times N^n = N \times P(a_n, b_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2b_n & a_n+b_n & a_n+b_n \\ a_n+b_n & 2b_n & a_n+b_n \\ a_n+b_n & a_n+b_n & 2b_n \end{pmatrix} = P(2b_n, a_n+b_n) = P(a_{n+1}, b_{n+1})$$

en posant $a_{n+1} = 2b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$ (ce qui est équivalent à l'écriture matricielle donnée dans l'énoncé).

Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Q6. On calcule le polynôme caractéristique de A. Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$,

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -2 \\ -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1) - 2 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda-2)(\lambda+1).$$

Ainsi, A possède deux valeurs propres simples : -1 et 2. En particulier, comme elle est de taille 2, elle est diagonalisable.

Étudions les sous-espaces propres. Soit $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{R}^2$.

$$AX = -X \iff \begin{cases} 2y = -x \\ x+y = -y \end{cases} \iff x = -2y \quad \text{donc} \quad E_{-1} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

$$AX = 2X \iff \begin{cases} 2y = 2x \\ x+y = 2y \end{cases} \iff x = y \quad \text{donc} \quad E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Ainsi $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ conviennent.

Q7. Pour tout $N \in \mathbf{N}$, $A^n = (QBQ^{-1})^n = QB^nQ^{-1}$. Calculons Q^{-1}.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 2/3 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 0 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 2/3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 2/3 \end{array}\right)$$

Ainsi, $Q^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, donc

$$\begin{aligned} A^n = QB^nQ^{-1} &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2(-1)^{n+1} & 2^n \\ (-1)^n & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2(-1)^n + 2^n & 2(-1)^{n+1} + 2^{n+1} \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^n + 2^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Q8. On utilise les relations établies en **Q5**. Pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2(-1)^n + 2^n & 2(-1)^{n+1} + 2^{n+1} \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^n + 2^{n+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2(-1)^n + 2^n \\ (-1)^{n+1} + 2^n \end{pmatrix}$$

Ainsi, $a_n = \frac{2(-1)^n + 2^n}{3}$ et $b_n = \frac{(-1)^{n+1} + 2^n}{3}$, et donc

$$N^n = P(a_n, b_n) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2(-1)^n + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n \\ (-1)^{n+1} + 2^n & 2(-1)^n + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n & 2(-1)^n + 2^n \end{pmatrix}$$

Exercice III

III.A. Loi de X.

Q1. Le résultat de l'expérience peut être n'importe quel numéro de place supérieur ou égal à s. Ainsi $X(\Omega) = \{n \in \mathbf{N} \mid n \geq s\}$.

Q2. Soit $n \geq s$. L'événement $(X = n)$ revient à dire que les $n-s$ places entre s et $n-1$ (inclus) étaient occupées, mais que la place numéro s est libre. La probabilité qu'une place soit occupée est $(1-p)$ et la probabilité qu'elle soit libre est p. De plus, les occupations des places sont indépendantes les unes des autres. On en déduit que $\mathbf{P}(X = n) = (1-p)^{n-s}p$.

Q3. On a $Y(\Omega) = \{n - s + 1 \mid n \in X(\omega)\} = \{n - s + 1 \mid n \geq s\} = \mathbf{N}^\star$. De plus, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $\mathbf{P}(Y = n) = \mathbf{P}(X = n + s - 1) = (1-p)^{n-1}p$. On reconnaît une loi géométrique de paramètre p et on en déduit immédiatement $\mathbf{E}(Y) = \frac{1}{p}$ et $\mathbf{V}(y) = \frac{1-p}{p^2}$.

Q4. Par linéarité de l'espérance, $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y + s - 1) = \mathbf{E}(Y) + s - 1 = \frac{1}{p} + s - 1$. De plus, $\mathbf{V}(X) = \mathbf{V}(Y + s - 1) = \mathbf{V}(Y) = \frac{1-p}{p^2}$.

III.B. Calcul de la distance moyenne à l'arrivée.

Q5. D'après la formule de transfert,

$$D_s = \mathbf{E}(|X - d|) = \sum_{n=s}^{+\infty} |n - d| \cdot \mathbf{P}(X = n).$$

On sépare cette somme en deux suivant le signe de $n - d$: si $n \leq d$, alors $|n - d| = d - n$; en revanche, si $n > d$, alors $|n - d| = n - d$. Ainsi,

$$D_s = \sum_{n=s}^{d} (d - n) \cdot \mathbf{P}(X = n) + \sum_{n=d+1}^{+\infty} (n - d) \cdot \mathbf{P}(X = n).$$

Q6. Soit $k \in \mathbf{N}$. Par définition,

$$u_{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} (k+1-i) \left(\frac{9}{10}\right)^i.$$

Comme suggéré, on effectue le changement d'indices $j = i - 1$ dans la somme :

$$u_{k+1} = \sum_{j=-1}^{k} (k-j) \left(\frac{9}{10}\right)^{j+1}.$$

On sépare le terme $j = -1$ du reste de la somme, puis on met un $\frac{9}{10}$ en facteur de la somme restante pour reconnaître u_k :

$$u_{k+1} = (k+1) \left(\frac{9}{10}\right)^0 + \sum_{j=0}^{k} (k-j) \left(\frac{9}{10}\right)^{j+1} = k + 1 + \frac{9}{10} \underbrace{\sum_{j=0}^{k} (k-j) \left(\frac{9}{10}\right)^j}_{u_k}.$$

On obtient bien la formule souhaitée.

Q7. On commence par calculer $u_0 = 0$, qui est bien égal à $10 \cdot 0 - 90 + 90 \left(\frac{9}{10}\right)^0 = 0$.

Soit maintenant $k \in \mathbf{N}$. On suppose que $u_k = 10k - 90 + 90 \left(\frac{9}{10}\right)^k$. Alors, d'aprés la question précédente,

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \frac{9}{10} u_k + k + 1 = \frac{9}{10} \left(10k - 90 + 90 \left(\frac{9}{10}\right)^k\right) + k + 1 \\ &= 9k - 81 + 90 \left(\frac{9}{10}\right)^{k+1} + k + 1 = 10k - 80 + 90 \left(\frac{9}{10}\right)^{k+1} \\ &= 10k - 90 + 10 + 90 \left(\frac{9}{10}\right)^{k+1} = 10(k+1) - 90 + 90 \left(\frac{9}{10}\right)^{k+1}. \end{aligned}$$

On reconnaît la propriété souhaitée au rang $k + 1$. Ceci conclut la démonstration de l'hérédité ; par principe de récurrence, la formule est donc vraie pour tout $k \in \mathbf{N}$.

Q8. On injecte l'expression de $\mathbf{P}(X = n)$ (avec $p = \frac{1}{10}$) dans S_1, puis on fait le changement d'indices $i = n - s$:

$$S_1 = \sum_{n=s}^{d} (d-n) \left(\frac{9}{10}\right)^{n-s} \frac{1}{10} = \frac{1}{10} \sum_{i=0}^{d-s} (d-s-i) \left(\frac{9}{10}\right)^i = \frac{1}{10} u_{d-s}.$$

On utilise alors le résultat de la question précédente :

$$S_1 = \frac{1}{10} u_{d-s} = d - s - 9 + 9 \left(\frac{9}{10}\right)^{d-s}.$$

Q9. On a

$$\begin{aligned} S_2 - S_1 &= \sum_{n=d+1}^{+\infty} (n-d) \cdot \mathbf{P}(X = n) - \sum_{n=0}^{d} (d-n) \cdot \mathbf{P}(X = n) \\ &= \sum_{n=d+1}^{+\infty} (n-d) \cdot \mathbf{P}(X = n) + \sum_{n=0}^{d} (n-d) \cdot \mathbf{P}(X = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n-d) \cdot \mathbf{P}(X = n). \end{aligned}$$

On reconnaît l'écriture de $\mathbf{E}(X - d)$ d'après la formule de transfert. Or, d'après **Q4**, $\mathbf{E}(X) = \frac{1}{p} + s - 1 = 9 + s$. Ainsi,

$$S_2 = S_1 + \mathbf{E}(X - d) = d - s - 9 + 9 \left(\frac{9}{10}\right)^{d-s} + 9 + s - d = 9 \left(\frac{9}{10}\right)^{d-s}.$$

Au final,

$$D_s = S_1 + S_2 = d - s - 9 + 18 \left(\frac{9}{10}\right)^{d-s} = d - s - 9 + 20 \left(\frac{9}{10}\right)^{d-s+1}.$$

III.C. Optimisation.

Q10.

$$\begin{aligned}
D_{s+1}-D_s &= d-(s+1)+1-\tfrac{1}{p}+\tfrac{2}{p}(1-p)^{d-s}-\Big(d-s+1-\tfrac{1}{p}+\tfrac{2}{p}(1-p)^{d-s+1}\Big)\\
&= -1+\tfrac{2}{p}\left((1-p)^{d-s}-(1-p)^{d-s+1}\right) = -1+\tfrac{2}{p}(1-p)^{d-s}\left(1-(1-p)\right)\\
&= -1+2(1-p)^{d-s}.
\end{aligned}$$

Q11.

$$\begin{aligned}
D_{s+1}-D_s \geq 0 &\iff 2(1-p)^{d-s} \geq 1 \iff (1-p)^{d-s} \geq \frac{1}{2} \iff (d-s)\ln(1-p) \geq -\ln 2\\
&\iff d-s \leq \frac{-\ln 2}{\ln(1-p)} \iff -s \leq -d-\frac{\ln 2}{\ln(1-p)} \iff s \geq d+\frac{\ln 2}{\ln(1-p)}.
\end{aligned}$$

On en déduit que la suite D_s est initialement décroissante, puis croissante. Le premier indice s pour lequel $D_{s+1} \geq D_s$ est le plus petit entier supérieur à $\alpha = d+\frac{\ln 2}{\ln(1-p)}$. C'est donc pour cette valeur de s que la valeur de D_s est minimale.

Q12. La stratégie optimale consiste à commencer à chercher une place à partir du s pour lequel la distance moyenne à l'arrivée D_s est minimale. D'après la question précédente, s est le plus petit entier strictement supérieur à $\alpha = d+\frac{\ln 2}{\ln 0{,}9}$.

En prenant le logarithme de l'encadrement donné dans l'énoncé, on trouve $-\frac{1}{6} < \frac{\ln 0{,}9}{\ln 2} < -\frac{1}{7}$ donc $-7 < \frac{\ln 2}{\ln 0{,}9} < -6$, d'où $d-7 < \alpha < d-6$. L'indice s à choisir est le plus petit entier strictement supérieur à α, donc $d-6$. En d'autres termes, on doit commencer à chercher une place à partir d'une distance à l'arrivée de 6 (incluse).

Q13. Dans la fonction `distance`, la variable `X` représente le numéro de la place où l'on essaie de se garer. L'expérience commence pour $X = s$, puis on incrémente X de 1 tant que la place numéro X n'est pas libre (autrement dit, tant qu'une épreuve de Bernoulli de paramètre p est un échec). La fonction complétée est donc

```
def distance(s,d,p):
  X = s
  while not Bernoulli(p):
    X = X + 1
  return abs(X-d)
```