Samedi 12 mars 2022 – Durée : 4h

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice I. Une expérience aléatoire

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une urne contient n boules numérotées $1, 2, \dots, n$, indiscernables au toucher.

On réalise l'expérience suivante :

- on pioche une boule dans l'urne ;
- on note son numéro, puis on la remet dans l'urne ;
- on recommence *indéfiniment* les deux étapes précédentes.

On admet qu'avec un tel protocole, les différents tirages sont mutuellement indépendants.

On adopte alors les notations suivantes :

- pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, on note Y_k la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir k boules distinctes.
- pour tout $k \in [\![1; n-1]\!]$, on pose $Z_k = Y_{k+1} - Y_k$ (par convention, $Z_0 = Y_1$).

Par exemple, en prenant $n = 3$, si les boules piochées successivement portent les numéro :

$$2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 1 \dots$$

on aura $Y_1 = 1$, $Y_2 = 4$, $Y_3 = 10$ et donc $Z_0 = 1$, $Z_1 = 3$ et $Z_2 = 6$.

I.A. Étude du cas particulier $n = 2$.

Dans cette partie seulement, on suppose que $n = 2$; l'urne contient donc deux boules numérotées de 1 à 2.

Pour tout $k \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$, on note D_k l'événement « au k-ème tirage, on pioche une boule différente de celle du premier tirage. » On admet que les événements D_k sont mutuellement indépendants.

Q1. Quelle est la loi de Y_1 ?

Q2. Donner l'univers-imagee de Y_2.

Q3. (a) Soit $m \in \mathbf{N}\setminus\{0, 1\}$. Exprimer l'événement $(Y_2 = m)$ à l'aide d'événements D_k $(k \geq 2)$.

(b) En déduire que

$$\forall\, m \in Y_2(\Omega)\ \mathbf{P}(Y_2 = m) = \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}.$$

(c) Rappeler le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.

(d) Pour tout $x \in [0; 1[$, calculer les sommes $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1}$ et $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2}$.

(e) Justifier que Y_2 admet une espérance qui vaut 3. Montrer que Y_2 admet une variance et calculer sa valeur.

I.B. **Étude du cas général.** On suppose dans cette partie que le nombre n de boules dans l'urne est supérieur ou égal à 2. On cherche à déterminer la loi de Z_k pour $k \in [\![1;n]\!]$.

Q4. Préciser l'univers-image de Z_k et Y_k pour tout $k \in \mathbf{N}^\star$.

Q5. Montrer que :

$$\forall m \geq 1 \ \ \forall \ell \geq k \ \mathbf{P}(Z_k = m \mid Y_k = \ell) = \left(\frac{k}{n}\right)^{m-1}\left(1 - \frac{k}{n}\right).$$

Q6. À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que Z_k suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.

Q7. Justifier que $\mathbf{E}(Z_k) = \dfrac{n}{n-k}$. Donner la variance de Z_k.

Q8. Montrer que $Y_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} Z_k$, puis que $\mathbf{E}(Y_n) = n\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$.

Q9. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

(a) Soit $k \in \mathbf{N}^\star$. Justifier que :

$$\forall x \in [k, k+1] \ \ \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}.$$

(b) En déduire que, pour tout $k \in \mathbf{N}^\star$,

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}.$$

(c) À l'aide de l'inégalité précédente, établir que :

$$\forall n \geq 1 \ \ \frac{1}{n} + \ln n \leq u_n \leq 1 + \ln n.$$

(d) Conclure que $u_n \sim \ln n$ lorsque $n \to +\infty$.

(e) En déduire un équivalent de $\mathbf{E}(Y_n)$ lorsque $n \to +\infty$.

(d'après CCINP TPC 2021)

Exercice II. Polynômes interpolateurs de Lagrange

Soient $n \in \mathbf{N}^\star$ et $E = \mathbf{R}_n[X]$. On note $P_0 = 1, P_1 = X, \ldots, P_n = X^n$ les vecteurs de la base canonique de E. On considère $(a_0, \ldots, a_n)$ une famille de réels deux à deux distincts.

Pour tous $P, Q \in E$, on pose $(P \mid Q) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} P(a_j)Q(a_j)$.

Q1. Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

Q2. Soit P un polynôme de E. Donner l'expression de $(P \mid P_0)$.

Q3. Pour tout $j \in [\![0;n]\!]$, on considère le polynôme

$$L_j(X) = \prod_{\substack{0\leq k\leq n\\ k\neq j}} \frac{1}{a_j - a_k}(X - a_k).$$

(a) Montrer que, pour tous $i, j \in [\![0; n]\!]$, $L_j(a_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

(b) Prouver que la famille $\mathcal{B} = (L_0, \dots, L_n)$ est une famille orthogonale de E.

(c) En déduire que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E.

(d) Pour tout polynôme $P \in E$, expliciter les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$.

(e) Déterminer $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} L_j$.

Q4. Soit H l'ensemble des polynômes $P \in E$ tels que $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} P(a_j) = 0$.

(a) Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E.

(b) Déterminer $H^\perp$ et en déduire la dimension de H.

Q5. Soit $Q \in E$.

(a) Déterminer le projeté orthogonal de Q sur $H^\perp$.

(b) Déterminer la distance de Q au sous-espace vectoriel H.

(d'après E3A PC 2021)

Exercice III. Approximations du nombre π

Partie I.

Q1. On considère la fonction h impaire et 2π-périodique dont la restriction à $[0; \pi[$ est donnée par $h(x) = x$.

(a) Donner les coefficients de Fourier $a_n(h)$ $(n \geq 0)$ et $b_n(h)$ $(n \geq 1)$ de la fonction h.

(b) Rappeler le théorème de Dirichlet.

(c) En déduire la convergence de la série de Fourier de h et l'expression de sa somme pour tout $x \in \mathbf{R}$.

(d) Montrer que, pour tout réel $x \in [0; \pi[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{x}{2}.$$

(e) En déduire l'égalité

$$\pi = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Q2. Soit n un entier naturel non nul. On pose :

$$J_n = \int_0^{\pi} \sin^{2n}(t)\, \mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t)\, \mathrm{d}t$.

(b) Montrer que $J_n = 2 \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t)\, \mathrm{d}t$.

(c) Rappeler les formules d'Euler relatives à l'exponentielle complexe.

(d) Rappeler la formule du binôme de Newton.

(e) Calculer, pour tout $k \in \mathbf{Z}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{ikt}\,\mathrm{d}t$.

(f) À l'aide du binôme de Newton, exprimer, pour tout réel t, le nombre $\cos^{2n} t$ en fonction d'exponentielles complexes.

(g) Que vaut $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$?

(h) En déduire l'égalité :

$$J_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n\, n!}\pi.$$

Partie II. Soit $c \in [0;1[$. On pose :

$$I(c) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 t}}.$$

Q3. Montrer que l'intégrale $I(c)$ est convergente.

Q4. On considère la fonction $f\colon x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(a) Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

(b) Montrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$.

(c) Montrer que f est développable en série entière sur $\mathcal{D}_f$ (on ne demande pas de calculer ce développement ici).

(d) Montrer que f est solution sur $\mathcal{D}_f$ de l'équation différentielle

$$(1-x^2)f'(x) - xf(x) = 0 \qquad (\mathcal{E}_f)$$

(e) On recherche le développement en série entière de f sur $\mathcal{D}_f$ sous la forme :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n.$$

(i) Donner, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, une relation de récurrence entre α_{n+1} et α_{n-1}.

(ii) Pour tout $p \in \mathbf{N}$, exprimer α_{2p} et α_{2p+1} en fonction de p.

(iii) Donner le développement en série entière de f.

Q5. On admet dans cette question que

$$I(c) = \sum_{p=0}^{+\infty} \alpha_{2p} c^{2p} \int_0^{\pi/2} \sin^{2p}(t)\,\mathrm{d}t.$$

En utilisant les résultats de la première partie, en déduire une expression de $I(c)$ sous la forme $I(c) = \pi S$, où S désigne la somme d'une série où les termes $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2p}(t)\,\mathrm{d}t$ n'apparaissent plus.

(d'après PT 2013)

⋆ ⋆

⋆