Exercice I. Une expérience aléatoire

I.A. Étude du cas particulier $n = 2$.

Q1. Par définition, la variable aléatoire Y_1 est le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule, elle suit donc une loi certaine de valeur 1.

Q2. Y_2 est le nombre de tirages nécessaires pour obtenir deux boules distinctes. Il faut au minimum deux tirages, sans maximum (en étant très malchanceux, on peut tirer perpétuellement la même boule). Ainsi $Y_2(\Omega) = \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$.

Q3. (a) L'événement $(Y_2 = m)$ signifie que l'on tire pour la première fois au m-ème tirage une boule différente de celle du premier tirage. Autrement dit, les $m-1$ premiers tirages sont identiques, puis le m-ème est différent. Ou encore : les tirages 2 à $m-1$ sont identiques au tirage 1, puis le tirage m est différent. Ainsi $(Y_2 = m) = \displaystyle\bigcap_{k=2}^{m-1} \overline{D_k} \cap D_m$

(b) Les événements D_k étant mutuellement indépendants, on déduit de l'égalité précédente que $\mathbf{P}(Y_2 = m) = \displaystyle\prod_{k=2}^{m-1} \mathbf{P}(\overline{D_k}) \times \mathbf{P}(D_m)$. Mais il est clair que $\mathbf{P}(\overline{D_k}) = \mathbf{P}(D_k) = \frac{1}{2}$ pour tout k (on a le choix entre seulement deux boules indiscernables), on en déduit que $\mathbf{P}(Y_2 = m) = \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}$.

(c) $\displaystyle\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$, avec un rayon de convergence de 1.

(d) Pour tout $x \in [0; 1[$, on note $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Par théorème de dérivation terme à terme, les deux sommes demandées sont égales respectivement à $f'(x)$ et $f''(x)$. Autrement dit,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kx^k = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

(e) Sous réserve d'absolue convergence,

$$\mathbf{E}(Y_2) = \sum_{y \in Y_2(\Omega)} y \cdot \mathbf{P}(Y_2 = y) = \sum_{m=2}^{+\infty} m \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} = \sum_{m=1}^{+\infty} m \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} - 1.$$

On a montré à la question précédente que la série $\sum_{m=1}^{+\infty} m \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}$ est absolument convergente (car $\frac{1}{2} \in]-1; 1[$) et vaut $\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 4$, on en déduit que $\mathbf{E}(Y_2)$ existe et vaut $4 - 1 = 3$.

La condition d'existence pour $\mathbf{V}(Y_2)$ est la convergence de $\mathbf{E}(Y_2^2) = \sum_{y \in Y_2(\Omega)} y^2 \cdot \mathbf{P}(Y_2 = y)$. Sous réserve de convergence,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y_2^2) &= \sum_{m=2}^{+\infty} m^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} = \sum_{m=2}^{+\infty} (m(m-1) + m) \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{m=2}^{+\infty} m(m-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{m-2} + \sum_{m=2}^{+\infty} m \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(1-\frac{1}{2})^3} + 3 = 11,
\end{aligned}$$

ce qui justifie a posteriori la convergence (donc l'existence de $\mathbf{V}(Y_2)$). On en déduit, d'après la formule de König-Huygens, que $\mathbf{V}(Y_2) = \mathbf{E}(Y_2^2) - \mathbf{E}(Y_2)^2 = 11 - 3^2 = 2$.

I.B. Étude du cas général.

Q4. Pour tout $k \in \mathbf{N}^\star$, $Y_k(\Omega) = [\![k; +\infty[\![$ (il faut au moins k tirages pour avoir k résultats différents, sans maximum). Par ailleurs, Z_k correspond au « temps d'attente » entre la première apparition d'un k-ème résultat distinct et la première apparition d'un $k+1$-ème résultat distinct. On a donc $Z_k(\Omega) = \mathbf{N}^\star$.

Q5. Soient $m \geq 1$ et $\ell \geq k$. Si on suppose que $Y_k = \ell$, l'événement $(Z_k = m)$ revient à dire que les tirages $\ell + 1$, $\ell + 2, \ldots, \ell + m - 1$ redonnent l'une des k boules précédemment tirées, tandis que le $\ell + m$-ème tirage donne une boule jamais tirée auparavant. La probabilité de tirer l'une des k boules déjà tirées précédemment dans une urne de n boules est $\frac{k}{n}$, celle de tirer une nouvelle boule est $\frac{n-k}{n} = 1 - \frac{k}{n}$. Les tirages étant mutuellement indépendants, on a donc

$$\mathbf{P}(Z_k = m \mid Y_k = \ell) = \left(\frac{k}{n}\right)^{m-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right).$$

Q6. Les événements $(Y_k = \ell)$ pour tout $\ell \geq k$ forment un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, pour tout $m \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Z_k = m) &= \sum_{\ell=k}^{+\infty} \mathbf{P}(Z_k = m \mid Y_k = \ell) \cdot \mathbf{P}(Y_k = \ell) = \sum_{\ell=k}^{+\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^{m-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \mathbf{P}(Y_k = \ell) \\
&= \left(\frac{k}{n}\right)^{m-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \underbrace{\sum_{\ell=k}^{+\infty} \mathbf{P}(Y_k = \ell)}_{=1} = p(1-p)^{m-1},
\end{aligned}$$

où $p = 1 - \frac{k}{n}$. On reconnaît une loi géométrique de paramètre $p = 1 - \frac{k}{n} \in]0; 1[$.

Q7. On sait que l'espérance d'une variable aléatoire géométrique de paramètre p est $\frac{1}{p}$ et sa variance $\frac{q}{p^2}$. Ici, $p = 1 - \frac{k}{n}$ donc $\mathbf{E}(Z_k) = \frac{1}{1-\frac{k}{n}} = \frac{n}{n-k}$ et $\mathbf{V}(Z_k) = \frac{\frac{k}{n}}{(1-\frac{k}{n})^2} = \frac{nk}{(n-k)^2}$.

Q8. Il s'agit d'une somme télescopique :

$$\sum_{k=0}^{n-1} Z_k = Z_0 + \sum_{k=1}^{n-1}(Y_{k+1} - Y_k) = Y_1 + Y_n - Y_1 = Y_n$$

Par linéarité de l'espérance, on en déduit :

$$\mathbf{E}(Y_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{E}(Z_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n-k} = n\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n-k} = n\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

en faisant le changement de variables $i = n - k$.

Q9. (a) Pour tout $x \in [k; k+1]$, on a $0 < k \leq x \leq k+1$ donc, par passage à l'inverse, $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$.

(b) On intègre l'inégalité précédente entre k et $k+1$. Par croissance de l'intégrale (car $k \leq k+1$),

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{k},$$

autrement dit $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$.

(c) On somme l'inégalité de la question précédente pour tous les k entre 1 et $n-1$, en remarquant que la somme du milieu est télescopique :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \big(\ln(k+1) - \ln(k)\big) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k},$$

autrement dit $u_n - 1 \leq \ln n \leq u_n - \frac{1}{n}$. On déduit de l'inégalité de gauche que $u_n \leq \ln n + 1$ et de l'inégalité de droite que $u_n \geq \ln n = \frac{1}{n}$, ce qui démontre le résultat demandé.

(d) On divise l'encadrement de la question précédente par $\ln n$ (strictement positif à partir d'un certain rang) :

$$1 + \frac{1}{n\ln n} \leq \frac{u_n}{\ln n} \leq 1 + \frac{1}{\ln n}$$

Les membres de gauche et de droite tendent vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$. Par théorème d'encadrement, on en déduit que $\frac{u_n}{\ln n}$ tend vers 1 en $+\infty$, autrement dit $u_n \sim \ln n$.

(e) On applique l'équivalent de la question précédente au résultat de la question **Q8** :

$$\mathbf{E}(Y_n) = n\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = nu_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln n.$$

Exercice II. Polynômes interpolateurs de Lagrange

Q1. Il s'agit de montrer que $(\cdot \mid \cdot)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive. La bilinéarité et la symétrie sont évidentes, par distributivité et commutativité de la multiplication. Pour les deux autres propriétés, considérons $P \in E$. Alors $(P \mid P) = \sum_{j=0}^{n} P(a_j)^2$ qui est donc positif. Si on suppose que $(P \mid P) = 0$, on en déduit que chacun des $P(a_j)^2$ est nul (une somme de nombres positifs est nulle ssi chacun des nombres est nul). Le polynôme P admet donc comme racines les nombres $(a_0, \ldots, a_n)$, soit $n+1$ racines distinctes. Comme P est de degré au plus n par définition, on en déduit que $P = 0$.

Q2. $(P \mid P_0) = (P \mid 1) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} P(a_j) \times 1 = \sum_{j=0}^{n} P(a_j)$.

Q3. (a) Soient $i, j \in [\![0; n]\!]$. Si $i = j$, alors $L_j(a_i) = L_j(a_j) = \displaystyle\prod_{k\neq j} \frac{a_j - a_k}{a_j - a_k} = 1$. Si $i \neq j$, alors k prend la valeur i à un moment dans le produit, et le facteur correspondant est donc $\frac{a_i - a_i}{a_j - a_i} = 0$. Évidemment, un produit dont l'un des facteurs est nul est nul, on a donc $L_j(a_i) = 0$.

(b) Soient $i \neq j \in [\![0; n]\!]$. Alors $(L_i \mid L_j) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} L_i(a_k)L_j(a_k)$. D'après la question précédente, les $L_i(a_k)$ sont nuls sauf pour $k = i$ et les $L_j(a_k)$ sont nuls sauf pour $k = j$. Comme $i \neq j$, on en déduit que chaque terme de la somme est nul. Ainsi $(L_i \mid L_j) = 0$. La famille est donc orthogonale.

(c) Il reste à vérifier que chaque L_i est de norme unité. Soit $i \in [\![1; n]\!]$.

$$(L_i \mid L_i) = \sum_{k=0}^{n} L_i(a_k)^2,$$

et d'après la question (a) tous les termes sont nuls sauf le terme $k = i$ qui vaut 1. On a donc $(L_i \mid L_i) = 1$, autrement dit $\|L_i\| = 1$. La famille $\mathcal{B}$ est donc orthonormée. En particulier, elle est libre. Or elle est constituée de $n+1$ vecteurs, dans E qui est de dimension $n+1$, c'est donc une base de E.

(d) Soit $P \in E$. Les coordonnées de P dans la base orthonormée $\mathcal{B}$ sont données par les produits scalaires $(P \mid L_i)$. Soit donc $i \in [\![0; n]\!]$.

$$(P \mid L_i) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)L_i(a_k),$$

mais $L_i(a_k)$ vaut 0 pour tout $k \neq i$ et 1 pour $k = i$. On en déduit que $(P \mid L_i) = P(a_i)$.

(e) Soit $k \in [\![0; n]\!]$. Si on évalue $\sum_{j=0}^{n} L_j$ au point a_k, chacun des $L_j(a_k)$ est nul sauf celui pour $j = k$ qui vaut 1. Le polynôme $\sum_{j=0}^{n} L_j$ vaut donc 1 en chacun des a_k. Autrement dit, le polynôme $\sum_{j=0}^n L_j - 1$ admet une racine en chacun des a_k, il est donc nul (polynôme de degré au plus n admettant $n+1$ racines distinctes). Ainsi, $\sum_{j=0}^n L_j - 1 = 0$, autrement dit $\sum_{j=0}^n L_j = 1$.

Q4. (a) On considère l'application φ définie pour tout $P \in E$ par $\varphi(P) = \sum_{j=0}^n P(a_j)$. C'est une application linéaire comme somme des applications linéaires d'évaluation $P \mapsto P(a_j)$. Alors $H = \operatorname{Ker}\varphi$ est un sous-espace vectoriel.

(b) D'après la question **Q1**, on a $P \in H \iff \sum_{k=0}^n P(a_k) = 0 \iff (P \mid P_0) = 0$. Ainsi $H = \mathrm{Vect}(P_0)^\perp$. On en déduit, comme E est de dimension finie, que $H^\perp = \mathrm{Vect}(P_0)$, qui est donc de dimension 1 (car $P_0 \neq 0$). Ainsi, H est de dimension $\dim(E) - 1 = n$; c'est un hyperplan de E (on pouvait le voir dès la question précédente en remarquant que φ est une forme linéaire non nulle).

Q5. (a) Une base de $H^\perp$ est donnée par le polynôme P_0. Il s'agit automatiquement d'une base orthogonale (comme elle est composée d'un seul vecteur), et on a $\|P_0\| = \sqrt{n+1}$. Le projeté orthogonal de Q sur $H^\perp$ est donc $\frac{1}{n+1}(Q \mid P_0) \cdot P_0 = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n Q(a_k)$. Autrement dit, le projeté orthogonal de Q sur $H^\perp$ est le polynôme constant égal à la valeur moyenne de Q sur les a_k.

(b) La distance entre Q et H est égale à la norme du projeté orthgonal de Q sur $H^\perp$. Autrement dit,

$$d(Q,H) = \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^n Q(a_k)\right| \|P_0\| = \sqrt{n+1}\left|\sum_{k=0}^n P(a_k)\right|$$

Exercice III. Approximations du nombre π

Partie I.

Q1. (a) La fonction h étant impaire, tous les coefficients $a_n(h)$ sont nuls. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$,

$$b_n(h) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \underbrace{t}\overbrace{\sin(nt)}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\left[-t\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^\pi - \frac{2}{\pi}\underbrace{\int_0^\pi \frac{-\cos(nt)}{n}\,\mathrm{d}t}_{=0} = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

(b) Si une fonction est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et 2π-périodique, alors sa série de Fourier converge vers sa régularisée.

(c) La fonction h est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et 2π-périodique, sa série de Fourier converge donc vers sa régularisée. Plus précisément, pour tout $x \in]-\pi;\pi[$ (h étant continue sur cet intervalle), la série de Fourier de h en x converge vers x. La série de Fourier de h en $x = \pm\pi$ converge vers $\frac{\pi+-\pi}{2} = 0$. Le résultat pour les autres valeurs de x s'en déduit par périodicité.

(d) En reformulant plus précisément le résultat de la question précédente pour $x \in [0;\pi[$! $2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nt) = x$, d'où on déduit immédiatement le résultat demandé (car $(-1)^{n+1} = (-1)^{n-1}$).

(e) On évalue le résultat de la question précédente en $x = \frac{\pi}{2} \in [0;\pi[$. On a alors quatre résultats possibles pour $\sin(nx)$: pour $n=1$, on a $\sin\frac{\pi}{2} = 1$; pour $n=2$, $\sin\pi = 0$; pour $n=3$, $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$ et $\sin(2\pi) = 0$ pour $n=4$, et de nouveau 1 pour $n=5$, etc. Autrement dit, $\sin(n\frac{\pi}{2}) = 0$ si n pair, et si n est un nombre impair écrit de la forme $n = 2p+1$, $\sin(n\frac{\pi}{2}) = (-1)^p$. En réécrivant la formule de la question (d), on a donc

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n} = \sum_{p=0}^{+\infty}\underbrace{(-1)^{2p}}_{=1}\frac{\sin((2p+1)\frac{\pi}{2})}{2p+1} = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1}.$$

On en déduit l'égalité demandée.

Q2. (a) On fait le changement de variables $t = \frac{\pi}{2} - u$ ($\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$) :

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^0 \sin^{2n}(\tfrac{\pi}{2}-u)(-\mathrm{d}u) = \int_0^{\pi/2}\sin^{2n}(\tfrac{\pi}{2}-u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/2}\cos^{2n}(u)\,\mathrm{d}u.$$

(b) D'après la relation de Chasles,

$$J_n = \int_0^{\pi/2}\sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\pi/2}^{\pi}\sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t.$$

On transforme la première intégrale à l'aide de la question précédente. Pour la deuxième, on peut par exemple faire le changement de variables $t = u + \frac{\pi}{2}$:

$$\int_{\pi/2}^{\pi}\sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2}\sin^{2n}(u+\tfrac{\pi}{2})\,\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/2}\cos^{2n}(u)\,\mathrm{d}u.$$

On a donc bien $J_n = 2\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}(u)\,\mathrm{d}u$.

(c) Pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$ et $\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$.

(d) Pour tous $x, y \in \mathbf{C}$ et $n \in \mathbf{N}$, $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

(e) Soit $k \in \mathbf{Z}$. Si $k \neq 0$, alors

$$\int_0^\pi e^{ikt}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{ik}e^{ikt}\right]_0^\pi = \frac{-i}{k}\left(1 - (-1)^k\right) = \begin{cases} \frac{-2i}{k} & \text{si } k \text{ impair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si $k = 0$, alors $\int_0^\pi e^{ikt}\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \mathrm{d}t = \pi$.

(f) On applique le binôme de Newton à la formule d'Euler relative au cosinus :

$$\cos^{2n}(t) = \left(\frac{1}{2}(e^{it}+e^{-it})\right)^{2n} = \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}e^{ikt}e^{-i(2n-k)t} = \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}e^{2i(k-n)t}.$$

(g) On intègre l'égalité de la question précédente. Par linéarité de l'intégrale,

$$\int_0^\pi \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\int_0^\pi e^{2i(k-n)t}\,\mathrm{d}t.$$

On utilise alors le résultat de la question (e), en remarquant que les nombres $2(k-n)$ sont tous pairs : les intégrales sont donc toutes nulles, sauf pour $k = n$: $\displaystyle\int_0^\pi \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4^n}\binom{2n}{n}$.

(h) D'après la question précédente,

$$J_n = \frac{\pi}{4^n}\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{\pi}{4^n}\frac{2n(2n-1)(2n-2)\cdots 2\cdot 1}{(n!)^2}$$

Dans le produit du numérateur, on isole les facteurs pairs et on les factorise chacun par deux :

$$2n(2n-2)\cdots 4\times 2 = 2^n n(n-1)\cdots 2\times 1 = 2^n n!$$

En simplifiant avec le dénominateur de la fraction, il reste donc

$$J_n = \frac{\pi(2n-1)(2n-3)\cdots 5\cdot 3\cdot 1}{2^n n!}.$$

Partie II.

Q3. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-c^2\sin^2}}$ est continue sur $[0;\frac{\pi}{2}]$. En effet, c étant strictement inférieur à 1, le dénominateur est toujours strictement positif sur cet intervalle. L'intégrale $I(c)$ n'admet donc pas d'impropretés, on peut dire qu'elle est convergente.

Q4. (a) $\mathcal{D}_f =]-1;1[$.

(b) f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ par théorème de composition.

(c) f est développable en série entière de rayon 1 car c'est la composée de la fonction $u \mapsto (1-u)^{-1/2}$ (qui est DSE de rayon 1) par le polynôme x^2 qui laisse stable l'intervalle $]-1;1[$.

(d) On a, pour tout $x \in]-1;1[$, $f'(x) = \dfrac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$ donc $(1-x^2)f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = xf(x)$. La fonction f est donc bien solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$.

(e) (i) La fonction f est solution de $(\mathcal{E}_f)$ ssi

$$\begin{aligned}
&\forall x \in]-1;1[\ \ (1-x^2)\sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n x^{n-1} - x\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n x^n = 0\\
\iff &\forall x \in]-1;1[\ \ \sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n x^{n+1} = 0\\
\iff &\forall x \in]-1;1[\ \ \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\alpha_{n+1}x^n - \sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)\alpha_{n-1}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_{n-1}x^n = 0\\
\iff &\forall x \in]-1;1[\ \ \alpha_1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\big((n+1)\alpha_{n+1} - n\alpha_n\big)x^n = 0
\end{aligned}$$

Par unicité du DSE de la fonction nulle, on en déduit que $\alpha_1 = 0$ et que, pour tout $n \geq 1$, $(n+1)\alpha_{n+1} - n\alpha_{n-1} = 0$, autrement dit $\alpha_{n+1} = \frac{n}{n+1}\alpha_{n-1}$.

(ii) Par récurrence immédiate, on déduit de $\alpha_1 = 0$ que tous les coefficients α_{2p+1} sont nuls. Par ailleurs $\alpha_2 = \frac{1}{2}\alpha_0$, $\alpha_4 = \frac{3}{4}\alpha_2 = \frac{3}{2\times 4}\alpha_0$, $\alpha_6 = \frac{5}{6}\alpha_4 = \frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}\alpha_0$, et par récurrence immédiate

$$\alpha_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 3\cdot 1}{2p(2p-2)\cdots 4\cdot 2}\alpha_0 = \frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 3\cdot 1}{2^p p!}\alpha_0.$$

Enfin, f vérifiant la condition initiale $f(0) = 1$, on en déduit que $\alpha_0 = 1$. Ainsi, pour tout $p \in \mathbf{N}$,

$$\alpha_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 3\cdot 1}{2^p p!}.$$

(iii) $f(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 3\cdot 1}{2^p p!}x^{2p}$, de rayon 1.

Q5. D'après **Q2** et **Q4.**(e), pour tout $p \in \mathbf{N}$, $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^{2p}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}J_p = \frac{\pi}{2}\cdot\alpha_{2p}$. En substituant dans la formule donnée dans l'énoncé, on a donc

$$I(c) = \sum_{p=0}^{+\infty}\alpha_{2p}^2 c^{2p}\tfrac{\pi}{2} = \pi\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(\alpha_{2p}c^p)^2}{2}.$$