I Décharge et charge d'un condensateur

I.A –

Q1. Les solutions de (1) sont les fonctions $t \mapsto \lambda e^{-t/\tau}$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$.

Q2. D'après la question précédente, on a $u(t) = u_0 e^{-t/\tau}$. Il s'agit de résoudre l'inéquation $u(t) \leq \frac{1}{10}u_0$. Autrement dit, (les nombres u_0 et τ étant strictement positifs) :

$$u_0 e^{-t/\tau} \leq \frac{u_0}{10} \iff e^{-t/\tau} \leq \frac{1}{10} \iff -\frac{t}{\tau} \leq -\ln 10 \iff t \geq \tau \ln 10.$$

On a donc $t_1 = \tau \ln 10 \simeq 2{,}3\tau$.

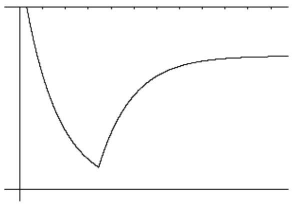
I.B –

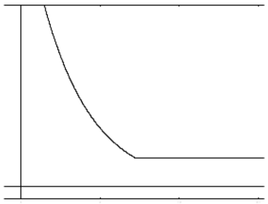
Q3. On résout l'équation (2) pour $t \geq t_1$. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $\lambda e^{-t/\tau}$ et une solution particulière est la fonction constante égale à U. On en déduit que les solutions de (2) sont les fonctions $t \mapsto \lambda e^{-t/\tau} + U$. La condition initiale $u(t_1) = \frac{u_0}{10}$ donne $\lambda = (\frac{u_0}{10} - U)e^{t_1/\tau}$, autrement dit $u(t) = \frac{u_0}{10}e^{(t_1-t)/\tau} + U(1 - e^{(t_1-t)/\tau})$.

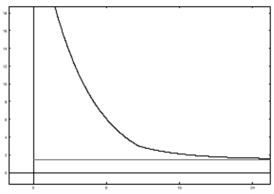
Q4. Sur l'intervalle $[0; t_1]$, la fonction u est strictement décroissante. Sa dérivée à gauche en t_1 vaut $-\frac{1}{\tau}u(t_1) = -\frac{u_0}{10\tau}$.

Sur l'intervalle $[t_1; +\infty[$, on a $u'(t) = \left(\frac{U}{\tau} - \frac{u_0}{10\tau}\right) e^{(t_1-t)/\tau}$. La fonction u est donc strictement croissante si $U > \frac{u_0}{10}$, strictement décroissante si $U < \frac{u_0}{10}$ et constante dans le cas où $U = \frac{u_0}{10}$. Dans tous les cas, la dérivée à droite de u en t_1 vaut $\frac{U}{\tau} - \frac{u_0}{10\tau}$ et sa limite en $+\infty$ est U.

Q5. De gauche à droite : $U > \frac{u_0}{10}$, $U = \frac{u_0}{10}$, $U < \frac{u_0}{10}$.







I.C –

Q6. On utilise la première formule :

$$E(t_1) = E(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} Cu(s)u'(s)\,\mathrm{d}s = E(t_0) + \frac{C}{2}\left[u^2(t)\right]_{t_0}^{t_1} = E(t_0) + \frac{C}{2}\left(\frac{u_0^2}{100} - u_0^2\right) = \frac{1}{200}Cu_0^2.$$

Q7. De la même manière, pour tout $t \geq t_1$,

$$E(t) = E(t_1) + \frac{C}{2}\left[u^2(s)\right]_{t_1}^{t} = \frac{C}{2}u^2(t).$$

Q8. D'après **Q4**, $u(t)$ tend vers U lorsque $t \to +\infty$. On en déduit que $E(t)$ tend vers $\frac{C}{2}U^2$.

II La méthode d'Euler

II.A – Résultats préliminaires

II.A.1)

Q9. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on pose $\varphi(x) = e^{-x} - 1 + x$. C'est une fonction dérivable (par composition) et, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\varphi'(x) = -e^{-x} + 1$, qui est donc négatif si $x \leq 0$ et positif si $x \geq 0$. On en déduit que φ admet un minimum en 0, celui-ci vaut $\varphi(0) = 0$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\varphi(x) \geq 0$, ce qui est équivalent à l'inégalité demandée.

Q10.

II.A.2)

Q11. La fonction ln est dérivable en 1. Par définition, on a donc $\lim_{\varepsilon\to 0} \dfrac{\ln(1+\varepsilon) - \overbrace{\ln(1)}^{0}}{\varepsilon} = \ln'(1) = 1$.

Q12. Soit $x \in \mathbf{R}$. La suite $(\frac{x}{n})_{n\in\mathbf{N}^\star}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc $N \in \mathbf{N}^\star$ tel que, pour tout $n \geq N$, $|\frac{x}{n}| \leq \varepsilon$. En particulier, pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, on obtient le résltat souhaité.

Q13. Pour tout $n \geq N$, on a $-\frac{1}{2} \leq \frac{x}{n} \leq \frac{1}{2}$ donc $1 + \frac{x}{n} \geq \frac{1}{2} > 0$, ainsi $\ln(1+\frac{x}{n})$ est bien défini (et donc la suite étudiée l'est). De plus, $\frac{x}{n}$ tend vers 0 donc, par composition des limites et d'après **Q11** :

$$\frac{\ln(1+x/n)}{1/n} = x\frac{\ln(1+x/n)}{x/n} \xrightarrow{n\to+\infty} x$$

Q14. Pour tout $n \geq N$,

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right) = \exp\left(\frac{\ln(1+x/n)}{1/n}\right) \xrightarrow{n\to+\infty} e^x,$$

d'après la question précédente et par continuité de la fonction exponentielle.

II.A.3)

Q15. On utilise les développements limités pour déterminer des équivalents du numérateur et du dénominateur : pour $x \to 0$, $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc $e^{-x} - 1 + x \sim \frac{x^2}{2}$ et $1 - e^{-x} \sim x$; d'où $\frac{e^{-x}-1+x}{1-e^{-x}} \sim \frac{x^2/2}{x} \sim \frac{x}{2} \xrightarrow{x\to 0} 0$.

II.B – Schéma d'approximation par la méthode d'Euler

Q16. On résout l'équation différentielle (3) avec la condition initiale $y(0) = c$: $f(t) = ce^{-\lambda t}$ pour tout $t \in [0;T]$.

Q17. La droite D_n est de coefficient directeur $-\lambda y_n$ donc son équation cartésienne s'écrit $y = -\lambda y_n t + b$ pour un certain $b \in \mathbf{R}$ à déterminer. On sait de plus que la droite passe par le point (t_n, y_n), donc $y_n = -\lambda y_n t_n + b$, autrement dit $b = y_n + \lambda t_n$. Au final, une équation cartésienne de D_n est $y = y_n - \lambda y_n(t - t_n)$.

Q18. La valeur y_{n+1} est l'ordonnée du point de D_n d'abscisse t_{n+1}. Autrement dit, d'après la question précédente, $y_{n+1} = y_n - \lambda y_n(t_{n+1} - t_n)$. Par définition des instants t_n, on a $t_{n+1} - t_n = h$, d'où $y_{n+1} = y_n(1 - \lambda h)$.

Q19.

Q20. La suite $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite géométrique de raison $(1-\lambda h)$ et de premier terme $y_0 = f(0) = c$. Ainsi, pour tout $n \in [\![0, N]\!]$, $y_n = c(1-\lambda h)^n$.

Q21. D'après la question précédente, $y_N = c(1-\lambda h)^N = \left(1 - \lambda\frac{T}{N}\right)^N$. On retrouve la limite de **Q14**, avec $x = -\lambda T$: ainsi $y_N \xrightarrow{N\to+\infty} e^{-\lambda T}$.

II.C – Étude de l'erreur de consistance du schéma d'approximation

Q22. Par définition, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\varepsilon_n(h) = ce^{-\lambda t_n} - (1-\lambda h)ce^{-\lambda t_{n-1}}$. Mais $t_n = t_{n-1} + h$ donc $e^{-\lambda t_n} = e^{-\lambda(t_{n-1}+h)} = e^{-\lambda h}e^{-\lambda t_{n-1}}$. D'où $\varepsilon_n = (e^{-\lambda h} - 1 + \lambda h)ce^{-\lambda t_{n-1}}$.

Q23. Le premier facteur est évidemment positif. D'après **Q9**, le second facteur est également positif. Ce réel est donc positif.

Q24. D'après les deux questions précédentes, pour tout $n \in [\![1, N]\!]$, $\varepsilon_n(h) = |c|e^{-\lambda t_{n-1}}(e^{-\lambda h} - 1 + \lambda h)$. On a donc $\varepsilon(h) = |c|(e^{-\lambda h} - 1 + \lambda h)\displaystyle\sum_{n=1}^{N} e^{-\lambda t_{n-1}}$. Et comme $t_{n-1} = (n-1)h$ pour tout n, on reconnaît une somme géométrique (de raison $e^{-\lambda h} \neq 1$ car $h \neq 0$). Ainsi :

$$\varepsilon(h) = |c|(e^{-\lambda h} - 1 + \lambda h)\sum_{n=1}^{N} e^{-\lambda(n-1)h} = \varepsilon(h) = |c|(e^{-\lambda h} - 1 + \lambda h)\frac{1 - e^{-\lambda NH}}{1 - e^{-\lambda h}}$$

Q25. On a, d'après **Q15** (avec $x = \lambda h \to 0$) :

$$\varepsilon(h) = |c|(1 - e^{-\lambda T})\frac{e^{-\lambda h} - 1 + \lambda h}{1 - e^{-\lambda h}} \xrightarrow{h\to 0} 0$$

II.D – Étude de la stabilité du schéma d'approximation

II.D.1)

Q26. Par définition, λ et h sont des réels strictement positifs donc $1 - a = \lambda h \neq 0$, ce qui prouve que r est bien défini.

Q27. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = z_{n+1} - y_{n+1} = az_n + \eta - ay_n = au_n + \eta$.

Q28. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - r = au_n + \eta - \frac{\eta}{1-a} = au_n - \frac{a\eta}{1-a} = a(u_n - r) = av_n$. On en déduit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est géométrique de raison a. Ainsi, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n = a^n v_0 = a^n(z_0 - y_0 - \frac{\eta}{1-a})$, puis $u_n = a^n(z_0 - y_0 - \frac{\eta}{1-a}) + \frac{\eta}{1-a}$.

II.D.2)

Q29. Les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ diffèrent d'une constante ; ainsi l'une est bornée si et seulement si l'autre l'est. La condition $u_0 \neq r$ implique que $v_0 \neq 0$; la suite géométrique $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est donc bornée si et seulement si sa raison est de valeur absolue inférieure ou égale à 1, autrement dit $|a| \leq 1$.

Q30. On reformule la condition de la question précédente : $|1 - \lambda h| \leq 1 \iff -1 \leq 1 - \lambda h \leq 1 \iff \lambda h \leq 2$.

II.D.3) Exemple

Q31. Dans cette question, nous avons $u_n = \frac{\eta}{1-a} - \eta\frac{a^n}{1-a}$ et $f(t_n) = f(nh) = e^{-10nh}$.

- Pour tout $h > 0$, la suite $(f(t_n))_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée car convergente (vers 0) ;
- Si on prend par exemple $h = 1$, on obtient $|a| = 99 > 1$, et la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est donc pas bornée.

III Étude de la stabilité d'un schéma numérique dans le cas d'un système différentiel

III.A – Étude d'un système différentiel

III.A.1)

Q32. $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Q33. La matrice A est symétrique et à coefficient réels. D'après le théorème spectral, elle est donc diagonalisable (en base orthonormée).

Q34. D'après le théorème spectral, on peut diagonaliser A en base orthonormée. Il s'agit donc ici de vérifier que -1 et -2 sont des valeurs propres de A. On peut par exemple calculer le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda + \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda + \frac{3}{2} \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+1)(\lambda+2).$$

On en déduit que les valeurs propres de A sont -1 et -2, ce qui démontre le résultat souhaité.

Q35.

$$X' = DX \iff \begin{cases} x_1' = -x_1 \\ x_2' = -2x_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1(t) = \lambda e^{-t} \\ x_2(t) = \mu e^{-2t} \end{cases} \quad (\lambda, \mu \in \mathbf{R})$$

III.A.2)

Q36. Pour tout $h > 0$, $\det(I_2 - hA) = h^2 \det(\frac{1}{h} I_2 - A) = h^2 \chi_A(\frac{1}{h}) = 1 + 3h + 2h^2 > 0$, la matrice $I_2 - hA$ est donc inversible.

Q37. D'après **Q34**, on peut écrire

$$I_2 - hA = I_2 - hPDP^{-1} = P(I_2 - hD)P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1+h & 0 \\ 0 & 1+2h \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Cette matrice $C_h = \begin{pmatrix} 1+h & 0 \\ 0 & 1+2h \end{pmatrix}$ est inversible car diagonale à coefficients non nuls, et son inverse est $C_h^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+h} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+2h} \end{pmatrix}$ Mais alors

$$B_h = (I_2 - hA)^{-1} = P \begin{pmatrix} \frac{1}{1+h} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+2h} \end{pmatrix} P^{-1}$$

donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$B_h^n = P \begin{pmatrix} \frac{1}{1+h} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+2h} \end{pmatrix}^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} \frac{1}{(1+h)^n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(1+2h)^n} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Q38. Notons $U = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $P^{-1}U = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$. Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$P^{-1} B_n^h U = P^{-1} B_n^h P \cdot P^{-1} U = \begin{pmatrix} \frac{1}{(1+h)^n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(1+2h)^n} \end{pmatrix} P^{-1} U = \begin{pmatrix} \frac{a'}{(1+h)^n} \\ \frac{b'}{(1+2h)^n} \end{pmatrix} \xrightarrow{n \to +\infty} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mais alors $B_n^h U = P \cdot P^{-1} B_n^h U \xrightarrow{n \to +\infty} 0$.

III.B – Méthode d'Euler

Q39. F étant solution du système différentiel (5), elle est en particulier dérivable en chaque point de $[0; T]$. On en déduit que la limite étudiée existe et vaut $F'(t)$ ou encore $AF(t)$.

Q40. Par définition, on a $(Y_{n+1} - Y_n) = hAY_{n-1}$ donc $(I_n - hA)Y_{n+1} = Y_n$, autrement dit $Y_{n+1} = B_h Y_n$.

Q41. On en déduit que $Y_N = B_h^N Y_0$.

Q42. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $U_{n+1} = Z_{n+1} - Y_{n+1} = B_h Z_n + V - B_h Y_n = B_h(Z_n - Y_n) + V = B_h U_n + V$.

Q43. Les valeurs propres de B_h sont $\frac{1}{1+h}$ et $\frac{1}{1+2h}$. En particulier, 0 n'est pas valeur propre de B_h, elle est donc inversible.

Q44. On a $U_{n+1} - B_h U_n = V = (I_2 - B_h)U_\infty$ donc $U_{n+1} - U_\infty = B_h U_n - B_h U_\infty = B_h(U_n - U_\infty)$.

Q45. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $V_n = B_h^n V_0 = B_h^n(U_0 - U_\infty)$, alors $U_n = U_\infty + B_h^n U_0 - B_h^n U_\infty = (I_2 - B_h^n)U_\infty + B_h^n U_0$.

Q46. D'après **Q38**, $\lim_{n \to +\infty} B_h^n U_\infty = \lim_{n \to +\infty} B_h^n U_0 = 0$. Or $U_n = U_\infty - B_h^n U_\infty + B_h^n U_0$, elle converge donc vers U_∞. En particulier, c'est une suite bornée de vecteurs.