1. À l'aide des sommes de Riemann de la fonction $f\colon x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ sur l'intervalle $[0;1]$, calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}.$$

2. Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$$x \mapsto \tan x,\ \text{sur } \left]-\tfrac{\pi}{2};\tfrac{\pi}{2}\right[;\quad x \mapsto e^x \sin x,\ \text{sur } \mathbf{R};\quad x \mapsto \frac{\ln x}{x},\ \text{sur } \mathbf{R}_+^\star;\quad x \mapsto \frac{1+x}{1+x^2},\ \text{sur } \mathbf{R}.$$

3. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\pi/3} (\tan t)^2 \,\mathrm{d}t;\qquad \int_0^3 |t^2-3t+2| \,\mathrm{d}t;\qquad \int_0^1 (1+t)\sqrt{t} \,\mathrm{d}t.$$

4. Calculer les intégrales suivantes (on pourra procéder par intégration par parties) :

$$\int_1^e t^2 \ln t \,\mathrm{d}t;\qquad \int_0^{\pi/4} \frac{t}{\cos^2 t} \,\mathrm{d}t;\qquad \int_0^1 t^3 e^{t^2} \,\mathrm{d}t;\qquad \int \arctan t \,\mathrm{d}t,\ \text{sur } \mathbf{R}.$$

5. Calculer les intégrales suivantes (on pourra utiliser le changement de variables proposé entre parenthèses) :

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+e^t}\ (x=e^t);\qquad \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+4},\ \text{sur } \mathbf{R}\ (t=2x);\qquad \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^3 t \,\mathrm{d}t\ (x=\sin t);$$

$$\int \frac{\ln t}{t} \,\mathrm{d}t,\ \text{sur } \mathbf{R}_+^\star\ (x=\ln t);\qquad \int \cos\left(\sqrt{t}\right) \,\mathrm{d}t,\ \text{sur } \mathbf{R}_+^\star\ (x=\sqrt{t})$$

6. Soit f une fonction continue sur $\mathbf{R}$. Soit $a>0$. Soit $T>0$.

(1) On suppose f paire ; montrer que $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$.

(2) On suppose f impaire ; montrer que $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

(3) On suppose f T-périodique (autrement dit, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x+T)=f(x)$). Montrer que $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$.

7. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos t};\qquad \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sin t + \sin 2t};\qquad \int_1^2 \frac{t}{1+t} \,\mathrm{d}t;\qquad \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+4t+5},\ \text{sur } \mathbf{R}.$$