1. Soient $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. On définit l'application $\varphi\colon \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ par
$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = ax_1x_2 + bx_1y_2 + cy_1x_2 + dy_1y_2.$$
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les nombres a, b, c, d pour que φ définisse un produit scalaire sur $\mathbf{R}^2$.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leq \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$.

3. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$.

(1) Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on pose $\varphi(A, B) = \operatorname{Tr}(A^T B)$. Montrer que φ munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ d'une structure d'espace préhilbertien.

(2) Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on a
$$\operatorname{Tr} A \leq \sqrt{n \operatorname{Tr}(A^T A)}.$$
Dans quels cas a-t-on égalité ?

4. Sur $E = \mathbf{R}_2[X]$, on définit $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{2} P(k)Q(k)$.

(1) Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur E.

(2) Construire une base orthonormée de E pour ce produit scalaire.

5. On pose, pour tous $P, Q \in \mathbf{R}[X]^2$,
$$\langle P, Q\rangle) \int_0^\pi P(t)Q(t)\sin t \,\mathrm{d}t.$$
(1) Montrer que $(\mathbf{R}[X], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace préhilbertien.

(2) Construire une base de $\mathbf{R}_2[X]$ qui soit orthonormale pour ce produit scalaire.

6. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Pour $X, Y \in \mathbf{R}^3$, on pose $\langle X, Y\rangle = X^T AY$.

(1) Vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}^3$.

(2) Donner une base des espaces $\operatorname{Vect}(e_1, e_3)^\perp$ et $\operatorname{Vect}(e_2)^\perp$

7. Dans l'espace euclidien canonique $\mathbf{R}^3$, on pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = x + y\}$. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F

8. Déterminer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbf{R}^2} \int_0^\pi (t\cos t - at - b)^2 \,\mathrm{d}t$ (on pourra s'intéresser au projeté orthogonal de la fonction $t \mapsto t\cos t$ sur un sous-espace vectoriel bien choisi).