

1. (lemme de Riemann-Lebesgue) Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a; b]$, montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \cos(nt) dt = 0.$$

2. Déterminer les séries de Fourier des signaux 2π -périodiques suivantes :

- (1) créneau : $f(x) = 0$ si $x \in]-\pi; 0]$ et 1 si $x \in]0; \pi]$;
- (2) dents de scie : $f(x) = x$ si $x \in]-\pi; \pi]$;
- (3) triangle : $f(x) = |x|$ si $x \in]-\pi; \pi]$.
- (4) $f(x) = \cos^3(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$;

3. On considère la fonction définie par $f(x) = x^2$ sur $[-\pi; \pi]$ et 2π -périodique. Déterminer les coefficients de Fourier de f et en déduire la somme des séries

$$\sum \frac{1}{n^2}, \quad \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum \frac{1}{n^4}.$$

4. On fixe $\theta \in]0; \pi[$ et on considère l'application $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ paire et 2π -périodique telle que, pour tout $x \in [0; \pi]$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0; \theta] \\ 0 & \text{si } x \in]\theta; \pi] \end{cases}$$

- (1) Représenter graphiquement la restriction de f à $[-\pi; 2\pi]$.
- (2) Déterminer la série de Fourier de f .
- (3) Étudier la convergence de cette série.

(4) En déduire, pour tout $\theta \in]0; \pi[$, la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n}$.

(5) Déterminer, pour tout $\theta \in]0; \pi[$, la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\theta)}{n^2}$. Que remarque-t-on dans le cas où $\theta = 1$?

5. Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction f 2π -périodique telle que, pour tout $x \in [-\pi; \pi]$, $f(x) = x(\pi - x)(\pi + x)$.

En déduire la valeur des sommes $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$.

6. Soit $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$. On s'intéresse à la fonction f 2π -périodique telle que, pour tout $x \in [-\pi; \pi]$, $f(x) = \cos(\alpha x)$. Déterminer la série de Fourier de f , puis la somme de cette série.

7. (*) Soit $T > 0$ et soient $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ deux suites réelles. Montrer qu'il existe *au plus* une application $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ continue et T -périodique dont les coefficients de Fourier soient les nombres $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$. Existe-t-il toujours *au moins* une telle fonction ? Que dire si on remplace l'hypothèse « continue » par « continue par morceaux » ?

8. (*) (un cas particulier du théorème de Weierstrass)

- (1) On considère la fonction $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x) = |\sin(\pi x)|$. Déterminer la série de Fourier de f et la somme de cette série.
- (2) Soient $n \in \mathbf{N}$ et $t \in \mathbf{R}$. Exprimer $\cos(2\pi nt)$ sous la forme d'un polynôme en $\sin(\pi t)$.
- (3) En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme P tel que, pour tout $x \in [-1; 1]$, $||x| - P(x)| \leq \varepsilon$.