1. Représenter graphiquement les parties suivantes. Sont-elles ouvertes ? fermées ? Déterminer leur intérieur et leur adhérence.

$$A_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \geq x^2\}; \quad A_2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < y < x^2\}; \quad A_3 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy > 0\}$$
$$A_4 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = y\}; \quad A_5 = \{(x,y) \in \mathbf{R} \mid x > 1\}; \quad A_6 = \mathbf{Q}.$$

2. Soit f l'application définie sur une partie de $\mathbf{R}^2$ par

$$f(x,y) = \frac{\sin x - \sin y}{x - y}.$$

Déterminer le domaine de définition de f, puis montrer qu'on peut la prolonger en une application continue sur $\mathbf{R}^2$.

3. Soit $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0.$$

L'application f est-elle continue ? Admet-elle des dérivées partielles en tout point ? Est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

4. Soit $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{4xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0.$$

Calculer les dérivées partielles secondes de f. Est-elle de classe $\mathcal{C}^2$?

5. On considère l'application $f\colon [-1;1]^2 \to \mathbf{R}$, $(x,y) \mapsto x^2y + \ln(1+y^2)$.

(1) Justifier que f admet un minimum et un maximum globaux.

(2) Montrer que, pour tout $t \in \left]-1;+\infty\right[$, $\ln(1+t) \leq t$.

(3) Montrer que f possède un unique point critique sur $\left]-1;1\right[^2$.

(4) f admet-elle un extremum en ce point critique ? (indication : on pourra calculer $f(x;x^3)$). Qu'en déduire sur les extrema de f ?

(5) On pose, pour tout $t \in [-1;1]$,

$$\varphi_1(t) = t^2 + \ln 2, \quad \varphi_2(t) = -t^2 + \ln 2, \quad \varphi_3(t) = t + \ln(1+t^2).$$

Étudier les fonctions φ_k et en déduire les extrema globaux de f.

6. $(\star)$ Déterminer l'aire maximale d'un triangle inscrit dans un cercle de rayon 1.

7. Étudier les extrema de la fonction définie sur $T = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x, y \geq 0 \text{ et } x+y \leq 1\}$ par $f(x,y) = xy(1-x-y)$.

8. Trouver toutes les applications $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}_+^\star \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$ telles que, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^\star$ et pour tout $y \in \mathbf{R}$,

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{x}.$$

On pourra s'aider d'un passage en coordonnées polaires.

9. Résoudre sur $\mathbf{R}_+^\star \times \mathbf{R}_+^\star$ l'équation différentielle

$$(E)\colon x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

On pourra utiliser le changement de variables $x = \frac{u}{v}$, $y = uv$.

10. Soit $a \in \mathbf{R}$. On cherche toutes les fonctions $g\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = a.$$

(1) Soit $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par $f(u, v) = g\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right)$. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{a}{2}$.
(2) Intégrer la réponse de la question précédente pour en déduire l'expression de f.
(3) En déduire les solutions de l'équation initiale.

11. Chercher toutes les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$ vérifiant :

$$\frac{\partial f}{\partial x} - 3\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

On pourra effectuer le changement de variables $u = ax + by$, $v = cx + dy$ avec des coefficients a, b, c, d bien choisis.

12. Soit $c \neq 0$. Chercher les solutions de classe $\mathcal{C}^2$ de l'équation suivante :

$$c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

On pourra utiliser le changement de variables $u = x + at$, $v = x + bt$ avec des coefficients a et b bien choisis.

13. Soit $k \in \mathbf{R}$. Résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = kf.$$

On pourra s'aider d'un passage en coordonnées polaires.