1. Les familles suivantes sont-elles libres ? génératrices ? des bases ?

$$\mathcal{V}_1 = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \quad (E = \mathbf{R}^3); \qquad \mathcal{V}_2 = \left(\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right) \quad (E = \mathbf{R}^2);$$

$$\mathcal{V}_3 = (X^2, (X+1)^2, (X+2)^2) \quad (E = \mathbf{R}_2[X]); \qquad \mathcal{V}_4 = ((X+1)^n)_{n\in\mathbf{N}} \quad (E = \mathbf{R}[X]).$$

2. ($\star$) Pour tout $a \in \mathbf{R}$, on note e_a l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $e_a(t) = \exp(at)$. Montrer que la famille $(e_a)_{a\in\mathbf{R}}$ est une famille libre de $E = \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ (on pourra déterminer un équivalent en $+\infty$ d'une combinaison linéaire des e_a). Est-elle génératrice ?

3. Dans $E = \mathbf{K}_3[X]$, on considère $F = \{P \in E \mid P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$, $G = \{P \in E \mid P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$ et $H = \{P \in E \mid P(X) = P(-X)\}$.

(1) Vérifier que F, G et H sont des sous-espaces vectoriels de E.

(2) Montrer que $F \oplus G = \{P \in E \mid P(1) = P(2) = 0\}$.

(3) Montrer que $F \oplus G \oplus H = E$.

4. Soit E l'ensemble des suites réelles convergentes.

(1) Montrer que E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.

(2) Soient F l'ensemble des suites réelles qui convergent vers 0, et G l'ensemble des suites réelles constantes. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, et que F et G sont supplémentaires.

5. Soit $n \in \mathbf{N}$. On note respectivement S_n et A_n les ensembles des matrices symétriques et antisymétriques de taille n à coefficients dans $\mathbf{K}$.

(1) Montrer que S_n et A_n sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et donner leurs dimensions.

(2) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbf{K}) = S_n \oplus A_n$.

6. Soit $n \in \mathbf{N}$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On considère l'application f définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ par $f(M) = A^T M + MA$.

(1) Montrer que f est linéaire.

(2) On note F l'ensemble des matrices antisymétriques réelles de taille n. Montrer que le sous-espace F est stable par f.

7. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ antisymétrique.

(1) Soit $X \in \mathbf{R}^n$ tel que $MX = -X$. En calculant $(MX)^T X$ de deux manières différentes, montrer que $X^T X = 0$. En déduire que $X = 0$.

(2) En déduire que la matrice $I_n + M$ est inversible.

(3) Soit $A = (I_n - M)(I_n + M)^{-1}$. Montrer que A est inversible et que $A^T = A^{-1}$.

8. Soit $n \in \mathbf{N}$. Existe-t-il deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telles que $AB - BA = I_n$?

9. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Expliquer pourquoi l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ de trace nulle est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Déterminer une droite supplémentaire de cet hyperplan. Proposer une base de cet hyperplan.