1. On lance successivement un dé cubique équilibré jusqu'à ce que le total des nombres obtenus soit supérieur ou égal à 3. Donner l'espérance du nombre de lancers réalisés.

2. On considère un trousseau de cinq clés dont deux permettent d'ouvrir une porte donnée. En commençant par une clé choisie au hasard, on teste les clés successivement jusqu'à l'ouverture de la porte. Déterminer l'espérance et la variance du nombre d'essais nécessaires.

3. On considère une urne contenant 5 boules blanches et 5 boules noires indiscernables, et on tire successivement et sans remise toutes les boules de l'urne. Déterminer l'espérance du rang d'obtention de la première boule noire.

4. On considère un devoir de mathématiques avec une moyenne de 8 et un écart-type de 2. Déterminer le plus petit intervalle centré autour de la moyenne tel qu'une copie tirée au hasard appartienne à celui-ci avec une probabilité supérieure à 75%.

5. Dans une urne contenant une boule numérotée 1, deux boules numérotées 2, ... et neuf boules numérotées 9, on tire une boule au hasard. Déterminer l'espérance et la variance du numéro de la boule tirée.

6. On lance successivement une pièce déséquilibrée. On note p la probabilité d'obtention de « pile », et X la proportion de « pile » obtenus après N lancers. Calculer l'espérance et la variance de X, puis déterminer N pour que X soit une valeur approchée de p au dixième avec une probabilité de 90%.

7. On se propose d'analyser le sang d'une population de N individus pour déceler la présence éventuelle d'un virus donc on sait qu'il affecte une personne donnée avec la probabilité p. On dispose pour cela de deux méthodes :
- on analyse, une par une, le sang des N personnes ;
- on regroupe la population en g groupes de n individus. On collecte le sang des n individus de chaque groupe dans une même éprouvette. Si le résultat d'un groupe est positif, on procède alors à une analyse individuelle des membres.

(1) Quelle est la loi de la variable X égale au nombre de groupes positifs ?

(2) Soit Y le nombre d'analyses dans la deuxième méthode. Calculer $\mathbf{E}(Y)$ en fonction de N, n et p.

(3) Comparer les deux méthodes pour $N = 1\,000$, $n = 100$ et $p = 0{,}01$.

8. Une entreprise emploie dix salariée·es : 3 ingénieur·es, 2 secrétaires, 5 technicien·es. La direction désigne au hasard trois de ces salarié·es pour participer au comité social et économique de l'entreprise[1]. On note X le nombre de secrétaires et Y le nombre d'ingénieur·es participant au comité.

(1) Déterminer la loi conjointe, puis les lois marginales du couple (X, Y).

(2) En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire $X + Y$.

9. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes dont les lois de probabilité sont les suivantes :

x	1	2
$\mathbf{P}(X = x)$	0,7	0,3

y	-2	5	8
$\mathbf{P}(Y = y)$	0,3	0,5	0,2

Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y). Vérifier par le calcul que $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

10. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur un espace probabilisé fini Ω. On suppose que X et Y suivent la loi $\mathcal{B}(2, \frac{1}{2})$. On pose $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$. Déterminer $\mathbf{E}(Z)$.

1. ce qui est illégal, ces représentant·es devant être élue·es par les salarié·es

11. On considère le couple de variables aléatoires (X, Y) dont la loi conjointe est donnée dans le tableau ci-dessous.

(1) Déterminer les lois marginales du couple (X, Y). Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

(2) Calculer l'espérance et la variance de X et de Y.

$X \backslash Y$	0	1	2	3
1	0,1	0,2	0,1	0,1
2	0,1	0	0	0,1
3	0,1	0	0,2	0

(3) Écrire les lois conditionnelles de X sachant $(Y = y)$ et de Y sachant $(X = x)$ pour tous $x \in [\![1; 3]\!]$ et $y \in [\![0; 3]\!]$.

(4) Déterminer la loi de $U = XY$.

(5) Déterminer la loi de $V = \min(X, Y)$.

(6) Représenter sous forme d'un tableau la loi conjointe de U et V.

(7) Déterminer $\mathrm{Cov}(X, Y)$ et $\rho(X, Y)$.

12. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles de variances non nulles sur un espace probabilisé fini ; soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ quatre réels, α et γ étant non nuls. On pose $U = \alpha X + \beta$ et $V = \gamma Y + \delta$. Comparer $\rho(U, V)$ et $\rho(X, Y)$.

13. On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) de loi décrite dans le tableau ci-dessous.

(1) Déterminer a.

(2) Donner les lois marginales du couple (X, Y).

(3) Calculer espérance et variance de X et Y.

$X \backslash Y$	1	2	3
1	0	a	0,1
2	a	0,3	0,1
3	0,1	0,2	0

(4) Calculer $\mathbf{E}(XY)$, puis $\mathrm{Cov}(X, Y)$ et $\rho(X, Y)$. Les variables aléatoires X et Y sont-elles corrélées ? indépendantes ?

14. On jette n fois un dé dont les faces comportent uniquement les chiffres 1, 2 et 3. On note p, q et r les probabilités respectives d'obtenir 1, 2 et 3 (on a alors $p + q + r = 1$). On appelle X et Y les variables aléatoires égales respectivement au nombre de 1 et au nombre de 2 obtenurs au cours des n lancers.

(1) Déterminer les lois de X et de Y.

(2) Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).

(3) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

15. Soient A et B deux variables aléatoires réelles indépendantes sur un espace probabilisé fini Ω, suivant toutes les deux la loi uniforme sur $[\![-3; 3]\!]$. Quelle est la probabilité pour que l'équation $x^3 - Ax + B = 0$ admette une racine réelle de multiplicité deux ou plus ?

16. ($\star$) On considère un ensemble E formé de m boules blanches et n boules noires. En dénombrant de deux façons différentes l'ensemble $\mathcal{F}$ des parties de E constituées de k boules, montrer l'identité :

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=\max(0,k-n)}^{\min(k,m)} \binom{m}{i} \binom{n}{k-i}.$$

17. ($\star$) On considère deux variables aléatoires X et Y sur un même espace probabilisé fini, suivant respectivement les lois $\mathcal{B}(m, p)$ et $\mathcal{B}(n, p)$. Montrer que $X + Y$ suit la loi $\mathcal{B}(m + n, p)$.

18. ($\star$) Soient X_1, X_2 et X_3 trois variables aléatoires réelles sur un univers fini Ω. On suppose X_1, X_2 et X_3 mutuellement indépendantes. Montrer que $X_1 + X_2$ et X_3 sont indépendantes.