

1. Montrer la convergence et calculer la somme des séries :

$$\sum \frac{1}{n^2 - 1}; \quad \sum \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}; \quad \sum \ln \left(1 - \frac{1}{n^2}\right); \quad \sum \frac{1}{5^n}; \quad \sum \frac{2^n}{3^{n-2}}.$$

2. Donner la nature des séries suivantes :

$$\begin{aligned} & \sum \frac{n}{n^2 + 1}; \quad \sum n^2 e^{-n}; \quad \sum \frac{|\sin n|}{n\sqrt{n}}; \quad \sum \cos \frac{1}{n^2}; \quad \sum \sin \frac{1}{n^2}; \\ & \sum \frac{n^2 + 1}{n^2}; \quad \sum \frac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3}; \quad \sum \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n; \quad \sum \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right); \quad \sum \ln(1+e^{-n}); \\ & \sum \frac{1}{\ln n}; \quad \sum \ln \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n - 1}\right); \quad \sum \left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right); \quad \sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}. \end{aligned}$$

3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite réelle. On suppose que :

- $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est alternée, c'est-à-dire que $\forall n \in \mathbf{N} \quad (-1)^n u_n \geq 0$;
- $(|u_n|)_{n \in \mathbf{N}}$ est décroissante ;
- $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

- (1) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbf{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbf{N}}$ sont adjacentes.
- (2) En déduire que la série $\sum u_n$ est convergente.
- (3) Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente.
- (4) Montrer que la série $\sum \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{2n+1}\right)$ est convergente.

4. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$.

- (1) Montrer que $u_n \sim v_n$.
- (2) Montrer que $\sum u_n$ converge (on pourra utiliser l'exercice précédent).
- (3) Montrer que $\sum v_n$ diverge. Qu'en conclure ?

5. On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer la convergence et calculer la somme de

$$\sum \frac{1}{n^2(n+1)^2}.$$