1. Soient $F\colon I \to \mathbf{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $a \in I$. Soit $p = \min\{k \in \mathbf{N}^\star \mid F^{(k)}(a) \neq 0\}$. Exprimer à l'aide de $F^{(p)}(a)$ un paramétrage, puis une équation cartésienne de la tangente à l'arc paramétré par F au point de paramètre $t = a$.

2. Dessiner l'allure des arcs paramétrés suivants au voisinage du point de paramètre $t = 0$:

(1) $x(t) = t + 2t^2 - t^3$, $y(t) = t + 2t^2 - t^7$;

(2) $x(t) = -t + t^2$, $y(t) = t^2 + t^3$;

(3) $x(t) = -t^2 - 2t^3$, $y(t) = -t^3 - t^5$;

(4) $x(t) = t^2 + 3t^3 + t^4$, $y(t) = -2t^2 - 6t^3 + t^4$.

3. Tracer les courbes paramétrées suivantes :

$$\mathcal{C}\colon \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \qquad \textit{(cycloïde)}$$

$$\mathcal{C}\colon \begin{cases} x = \dfrac{t + t^3}{1 + t^4} \\ y = \dfrac{t - t^3}{1 + t^4} \end{cases} \qquad \textit{(lemniscate de Bernoulli)}$$

$$\mathcal{C}\colon \begin{cases} x = 3\cos t - \cos(3t) \\ y = 3\sin t - \sin(3t) \end{cases} \qquad \textit{(néphroïde)}$$

$$\mathcal{C}\colon \begin{cases} x = \dfrac{t}{1 + t^3} \\ y = \dfrac{t^2}{1 + t^3} \end{cases} \qquad \textit{(folium de Descartes)}$$

$$\mathcal{C}\colon \begin{cases} x = \cos t\,(1 + \cos t) \\ y = \sin t\,(1 + \cos t) \end{cases} \qquad \textit{(cardioïde)}$$

4. Déterminer la longueur des courbes suivantes :

(1) la cardioïde ;

(2) une « arche » de cycloïde ;

(3) la « feuille » du folium de Descartes (l'exprimer sous la forme d'une intégrale).

5. Montrer que la courbe paramétrée $\mathcal{C}\colon \begin{cases} x = 2t - \frac{1}{t^2} \\ y = 2t + t^2 \end{cases}$ admet un point double et en donner les coordonnées.