

1. Dans chacun des cas suivants, dire si λ est une valeur propre de A (resp. u). Le cas échéant, déterminer le sous-espace propre correspondant.

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \lambda \in \{0, 1, 2\}. \quad (2) A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \lambda = \pm 2.$$

$$(3) u: \mathbf{R}[X] \rightarrow \mathbf{R}[X], P \mapsto P', \lambda \in \mathbf{R}. \quad (4) u: \mathbf{R}[X] \rightarrow \mathbf{R}[X], P \mapsto XP', \lambda \in \mathbf{R}.$$

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice possédant une unique valeur propre. À quelle condition est-elle diagonalisable ?

3. Justifier que les matrices suivantes sont diagonalisables et les diagonaliser.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -8 & -6 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix};$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$. Montrer que A est diagonalisable et calculer ses valeurs propres ; en déduire qu'il existe une matrice B telle que $B^3 = A$.

5. Dans $E = \mathbf{K}_n[X]$, on considère l'endomorphisme u défini par $u(P) = (X^2 - 1)P'' + (2X + 1)P'$. Déterminer la matrice de u dans la base canonique de E , puis montrer que u est diagonalisable.

6. Trigonaliser la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

7. Déterminer les suites vérifiant les propriétés suivantes :

$$(1) \begin{cases} u_0 = 1; u_1 = 2; \\ \forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n \end{cases} \quad (2) \begin{cases} u_0 = -1; u_1 = 0; \\ \forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+2} = 4(u_{n+1} - u_n) \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} u_0 = 1; u_1 = 1; \\ \forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+2} = 2(u_{n+1} - u_n) \end{cases}$$

8. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

(1) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

(2) Soient $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définies par $u_0 = -2$, $v_0 = 4$, $w_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n + 2v_n + w_n \\ v_{n+1} = 2u_n - v_n - w_n \\ w_{n+1} = -4u_n + 4v_n + 3w_n. \end{cases}$$

Déterminer l'expression de u_n , v_n et w_n en fonction de n .