

1. Justifier la convergence et calculer les valeurs des intégrales suivantes :

$$J_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}; \quad J_2 = \int_0^{+\infty} t e^{-t^2} dt; \quad J_3 = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos t}{\sqrt{\sin t}} dt$$

2. Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt; & I_2 &= \int_0^1 \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt; & I_3 &= \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^3\sqrt{t}} dt \\ I_4 &= \int_0^1 \frac{t^2+1}{t} dt; & I_5 &= \int_0^1 \frac{e^t}{t} dt; & I_6 &= \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{\cos t}}{t} dt; & I_7 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{e^t + t^2 e^{-t}} \\ I_8 &= \int_0^1 \frac{dt}{1-\sqrt{t}}; & I_9 &= \int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt; & I_{10} &= \int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{1+t^2}{1+t^3}\right) \end{aligned}$$

3.

(1) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt$ converge.

(2) Calculer cette intégrale à l'aide du changement de variables $t = \tan \theta$.

4.

(1) Montrer que $\int_2^{+\infty} \frac{4t}{t^4-1} dt$ converge.

(2) Vérifier que, pour tout $t > 2$,

$$\frac{4t}{t^4-1} = \frac{-2t}{t^2+1} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1}.$$

(3) En déduire la valeur de l'intégrale.

5. On considère $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt$.

(1) Montrer que I est convergente.

(2) Montrer que $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t) dt$.

(3) Montrer que $2I = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right) dt$.

(4) En déduire la valeur de I .

Solutions. 1. $J_1 = \pi$; $J_2 = \frac{1}{2}$; $J_3 = 2^{3/4}$; 2. I_1 : cv; I_2 : cv; I_3 : cv; I_4 : dv; I_5 : dv; I_6 : dv; I_7 : cv; I_8 : dv; I_9 : cv; I_{10} : dv; 3. $\frac{\pi}{4}$; 4. $\ln 5 - \ln 3$; 5. $-\frac{\pi}{2} \ln 2$.